БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

*А*. А. Леваков

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ

АНАЛИЗ

Д*опушено Министерством образования Республики Беларусь в качестве учебного пособия д*л*я* с*тудентов*

*учреждений высшего образования по математическим специальностям*

МИНСК

БГУ 2014

УДК 51*7*(075.8) ББК 22.161я73

Л34

Рецензенты: **кафедра высшей математики Белорусского государственного**

**технологического университета (заведующий кафедрой кандидат физико-математических наук, доцент** *О. Н. Пыжкова)*; **доктор физико-математических наук, проф**ессор *В. В. Цегельник*

**Л34**

**Леваков, А. А.**

**Математический анализ : учеб. п**особие */ А.* А. Л**еваков. — Минск : БГУ,** 2014. – 383 с.

**ISBN 978-985-566-034-8.**

**Изложены разделы математического анализа, традиционно изучаемые на фа к*у*льтете прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета. Все приведенные утверждения снабжены полными доказательствами.**

**Предназначено для студентов, обучающихся в учреждениях высшего образо вания по математическим специальностям.**

**УДК 517(075.8) ББК 22.161я73**

**© Леваков** А. А., 2014 © БГУ, 2014

**ISBN 978-985-566-034-8**

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

N — множество натуральных чисел Q — множество рациональных чисел R — множество вещественных (действительных) чисел *|a, b|* — промежуток с концами *a* и *b* [*a, b*] — отрезок с концами *a* и *b* (*a, b*) — интервал с концами *a* и *b*

*∀* — для любого *∃* — существует := — равно по определению ⊲ — конец доказательства *A ⊂ B* — множество *A* содержится в *B*

*x ∈ A* — элемент *x* принадлежит множеству *A A ∪ B* — объединение множеств *A* и *B A ∩ B* — пересечение множеств *A* и *B A \ B* — разность множеств *A* и *B A × B* — произведение множеств *A* и *B*

2И — двойной интеграл НИ-1 — несобственный интеграл первого типа НИ-2 — несобственный интеграл второго типа КРИ-1 — криволинейный интеграл первого типа КРИ-2 — криволинейный интеграл второго типа ПОВИ-1 — поверхностный интеграл первого типа ПОВИ-2 — поверхностный интеграл второго типа НИЗОП-1 — несобственный интеграл первого типа,

зависящий от параметра НИЗОП-2 — несобственный интеграл второго типа,

зависящий от параметра ФР — функциональный ряд ФП — функциональная последовательность

дл. — длина пл. — площадь об. — объем ф2п — функция двух переменных

— знак транспонирования

**ПРЕДИСЛОВИЕ**

**Математическое образование играет ключевую роль в подготовке высококвалифицированных современных специалистов, а математи ческий анализ составляет его базу. Математический анализ - раздел математики, изучающий функциональные зависимости с помощью методов дифференциального и интегрального исчисления.**

**Настоящее учебное пособие написано на основе многолетнего опыта чтения лекций автором по фундаментальной математике на фа культете прикладной математики и информатики БГУ, а также лекций по математическому анализу проф**ессора Ю. С. Бог**данова и предна значено в первую очередь для студентов факультета прикладной ма тематики и информатики** БГУ, но бу**дет полезно и студентам других факультетов и университетов с углубленным изучением математики.**

**Курс математического анализа тесно связан с другими дисци плинами по фундаментальной математике – геометрией и алгеброй, дифференциальными уравнениями, которые читаются студентам факультета прикладной математики и информатики параллельно, и сопровождается практическими и лабораторными занятиями, что учтено при написании предлагаемого издания. От студентов, при ступающих к изучению математического анализа с помощью настоя щего учебного пособия, требуется знание математики лишь в объеме средней школы. Автор стремился соединить доступность, строгость и полноту изложения материала с краткостью, свойственной реаль ным лекциям.**

*ГЛАВА1*

ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1.1. Числа

Множество н а т у р а л ь н ы х чисел

N = *{*1*,*2*,...},*N0 = N *∪ {*0*}*

достаточно для обеспечения потребностей счета. Множество неотрицатель- ных десятичных дробей дает возможность измерять длины и многие другие величины со сколь угодно малой погрешностью. Каждая конечная десятич- ная дробь имеет два представления в виде периодической десятичной дроби. Например,

0*,*27 = 0*,*2700*...* = 0*,*27(0)*,*

0*,*27 = 0*,*2699*...* = 0*,*26(9)*.*

За множество неотрицательных р а ц и о н а л ь н ы х чисел Q0 принимают множество неотрицательных периодических десятичных дробей. В дальней- шем, когда мы будем говорить о конечной десятичной дроби как о рациональ- ном числе, то будем иметь в виду одну из двух периодических десятичных дробей, равных этой десятичной дроби. Каждое неотрицательное рациональ- ное число можно представить в виде *m/n, m ∈* N0*, n ∈* N*.*

Для точного измерения всех отрезков используют множество неотрица- тельных действительных (вещественных) чисел R0*,* состоящее из всевозможных бесконечных десятичных дробей α = *a*0*,a*1*a*2 *...an ..., a*0 *∈ N*0*, ak ∈ {*0*,*1*,...,*9*}.* Приписывая числам множества R0 знаки «*−* » и «+», получим множество всех действительных чисел R*.* Непериодические беско- нечные дроби относят к и р р а ц и о н а л ь н ы м числам. П р и б л и ж е н и е м порядка *n ∈* N0 по н е д о с т а т к у неотрицательного вещественного числа α = *a*0*,a*1*a*2 *...an ...* (обозначают α*n*) называют десятичную дробь α*n* = = *a*0*,a*1 *...an,* если же α — отрицательное вещественное число, то дробь α*n* = *a*0*,a*1 *...an−*10*−n.* Приближение нулевого порядка по недостатку числа α = *a*0*,a*1*a*2 *...an ...* называют целой частью этого числа и обозначают [α] .

6 Глава 1. Предел последовательности

Если α — иррациональное, то запись α = β означает, что α*n* = β*n ∀n ∈ ∈* N0 (*∀* — для любого). Если α— рациональное, то α = β означает, что либо α*n* = β*n ∀n ∈* N0*,* либо α и β — два представления одной деся- тичной дроби, одно из них с нулем в периоде, другое — с девяткой. Если α*n* ⩽ β*n ∀n ∈* N0*,* то считаем, что α ⩽ β*.* Если α*n* ⩽ β*n ∀n ∈* N0 и α = β*,* то α *<* β*.*

Критерий (необходимое и достаточное условие) различия чисел *Число* α *меньше, чем* β*,* α *<* β*, тогда и только тогда, когда существует число k ∈* N0 *такое, что*

α*k* + 2 *·* 10*−k* ⩽ β*k.* (1.1)

Доказательство. Необходимость. Из неравенства α *<* β следует суще- ствование числа *i ∈* N0 такого, что α*n <* β*n ∀n* ⩾ *i* и α*n* = β*n ∀n<i* (если *i >* 0). Если окажется, что α*i* + 2 *·* 10*−i* ⩽ β*i,* то искомое число *k* равно *i.* В случае, когда α*i* + 10*−i* = β*i,* переходим к рассмотрению при- ближений по недостатку α*i*+1 и β*i*+1 порядка *i* + 1 чисел α и β*.* Если α*i*+1 + 2*·* 10*−*(*i*+1) ⩽ β*i*+1*,* то *k* = *i* + 1*.* В случае, когда α*i*+1 + 10*−i−*1 = β*i*+1*,* переходим к рассмотрению α*i*+2*,*β*i*+2 и т. д. На некотором шаге должно выполняться нужное неравенство (1.1), т. к. в противном случае все прибли- жения по недостатку порядка большего, чем *i,* одного числа заканчиваются девятками, а другого — нулями, и тогда α и β — два периодических пред- ставления одной десятичной дроби, что противоречит неравенству α *<* β*.*

Достаточность. Из соотношения (1.1) следует, что α = β и α*k* ⩽β*k ∀k ∈ ∈* N0*,* т. е. α *<* β*.* ⊲

Пример 1.1. Проиллюстрируем схему доказательства критерия разли- чия на примере чисел α = *−*2*,*17804*...* и β = *−*2*,*17799*....* Выпишем при- ближения по недостатку чисел α и β до порядка 5

α0 = *−*3*,* β0 = *−*3*,* α1 = *−*2*,*2*,* β0 = *−*2*,*2*,* α2 = *−*2*,*18*,* β2 = *−*2*,*18*,* α3 = *−*2*,*179*,* β3 = *−*2*,*178*,* α4 = *−*2*,*1781*,* β4 = *−*2*,*1780*,* α5 = *−*2*,*17805*,* β5 = *−*2*,*17800*.*

Сравнивая эти приближения, видим, что число *i* из доказательства критерия в данном примере равно 3. Поскольку α3 + 10*−*3 = β3*,* α4 + 10*−*4 = β4*,* α5 + + 2 *·* 10*−*5 *<* β5*,* то число *k* из критерия различия чисел равно 5.

1.2. Грани числовых множеств 7

Теорема о плотности множества действительных чисел

*Для любых двух действительных чисел* α*,*β*,* α *<* β*, существует рацио- нальное число r, заключенное между ними, т. е.* α *<r<* β*.*

Доказательство. По критерию различия чисел существует *k ∈* N0 та- кое, что α*k*+2*·*10*−k*⩽β*k.* Пусть α*k*+1*,*β*k*+1 — приближения по недостатку по- рядка *k*+1 чисел α и β*.* В качестве *r* возьмем число α*k*+10*−k*+5*·*10*−*(*k*+1)*,* которое удовлетворяет неравенствам α*k*+1+2 *·* 10*−*(*k*+1)⩽*r*⩽β*k*+1*−*2 *·* 10*−*(*k*+1)*,* и, следовательно, по критерию различия чисел α *<r<* β*.* ⊲

1.2. Грани числовых множеств

Интервалом и отрезкомсконцами α и β называют соответствен- но множества

(α*,*β) = *{x ∈* R : α *<x<* β*},*[α*,*β] = *{x ∈* R : α ⩽ *x* ⩽ β*}.*

Интервал (α*,*β)*,* отрезок [α*,*β]*,* а также полуинтервалы [α*,*β)*,* (α*,*β] имеют общее название п р о м е ж у т о к (с концами α и β)*,* который обозна- чают *|*α*,*β*|.*

Любое подмножество множества действительных чисел называют число- вым множеством. В числовом множестве *X,* состоящем из конечного числа элементов, имеются наибольший элемент max*X* и наименьший min*X.* В бесконечном множестве такие элементы могут существовать, но могут и не существовать: max(α*,*β] = β*,* а min(α*,*β] не существует.

Числовое множество *X* называют ограниченным сверху, если для этого множества существует верхняя граница β*,* т. е. существует такое число β*,* что для всех *x ∈ X* выполняется неравенство *x* ⩽ β*.* Наименьшую из верхних границ называют точной верхней гранью *X* и обозначают sup*X.* Таким образом, число β является точной верхней гранью множества *X,* если оно удовлетворяет следующим двум условиям:

*∀x ∈ X ⇒ x* ⩽ β; (1.2)

*∀*γ *<* β*,∃* ̄*x ∈ X* : ̄*x >* γ (1.3)

(*∃* — существует, *⇒* — следует, : — такое, что).

Аналогично определяют точную нижнюю грань множества *X.* Число α называют нижней границей *X,* если *∀x ∈ X* выполняется неравен- ство *x*⩾α*.* Наибольшую из нижних границ называют точной нижней гранью и обозначают inf *X.* Ясно, что sup(α*,*β) = β*,* inf(α*,*β) = α*.*

8 Глава 1. Предел последовательности

Теорема о гранях *Каждое непустое ограниченное сверху множество имеет точную верх- нюю грань, непустое ограниченное снизу — точную нижнюю грань.*

Доказательство для ограниченного сверху множества *X.* Заменим все периодические дроби с девяткой в периоде, входящие в множество *X,* на равные периодические дроби с нулем в периоде. Множество целых частей чисел из *X* ограничено сверху, следовательно, в этом множестве существует максимальное число *p.* Пусть *Y* — множество чисел из *X,* целая часть ко- торых равна *p.* Обозначим через *Yn* множество приближений по недостатку порядка *n ∈* N элементов множества *Y.* Для каждого *n ∈* N множество *Yn* состоит из конечного числа элементов, следовательно, для каждого *n ∈ ∈* N множество *Yn* имеет максимальный элемент. Пусть max*Yn* = β*n* = = *b*0*,b*1 *b*2 *... bn.* Десятичная дробь β*n*+1 = max*Yn*+1 = *b*0*,b*1 *... bn−*1 θ*n bn*+1 отличается от β*n* = *b*0*,b*1 *... bn−*1 *bn* лишь наличием дополнительной цифры на (n+1) месте после запятой и, если *p <* 0*,* то цифрой на *n* месте, цифры же *b*0*,b*1*,b*2*,...,bn−*1 у них совпадают. Пусть η*n−*1 = *b*0*,b*1 *b*2 *... bn−*1 и пусть η — число, приближениями по недостатку которого являются числа η*n−*1*.* По построению для любого *y ∈ Y* выполняется неравенство *yn−*1 ⩽ η*n−*1 *∀n ∈ ∈* N*.* Следовательно, для любого *y ∈ Y* выполняется неравенство *y* ⩽ η*.* Более того, если γ *<* η*,* то на основании критерия различия чисел найдется число *l ∈* N0 такое, что

γ*l* + 2 *·* 10*−l* ⩽ η*l.* (1.4)

Из определения η*l* следует существование элемента ̄*y ∈ Y,* для которого  ̄*yl* = η*l.* Из условия (1.4) вытекает γ *<*  ̄*y.* Таким образом, число η удовлетво- ряет условиям (1.2), (1.3), следовательно, sup*Y* = η*.* Так как sup*X* = sup*Y,* то η является точной верхней гранью и всего множества *X.* ⊲

Замечание 1.1. Если *X* неограниченное сверху множество, т. е. для лю- бого β *∈* R найдется число ̄*x ∈ X* такое, что ̄*x >* β*,* то по определению по- лагают sup*X* := +*∞* (:= — равно по определению). Для неограниченного снизу множества *X* по определению полагают inf *X* := *−∞.*

Таким образом, любое непустое множество имеет точные верхнюю и ниж- нюю грани. Но для ограниченного сверху (снизу) множества точной верхней (нижней) гранью является действительное число или, как говорят, множество имеет конечную точную верхнюю (нижнюю) грань.

С помощью теоремы о гранях можно определить арифметические опе- рации с действительными числами, а также установить переместительный, сочетательный, распределительный законы для вещественных чисел.

1.3. Логические операции 9

Под суммой α + β двух вещественных чисел α и β понимают

α + β = sup*{*α*n* + β*n},*

где α*n* и β*n* — приближения по недостатку порядка *n* чисел α и β соот- ветственно, а под р а з н о с т ь ю α *−* β — число α + (*−*β)*.*

За произведение αβ двух неотрицательных или неотрицательного и отрицательного вещественных чисел α и β принимают

αβ = sup*{*α*n*β*n}.*

Если α и β — два отрицательных числа, то αβ = (*−*α)(*−*β)*.*

Для любых действительных чисел α*,*β = 0 уравнение β*x* = α имеет единственное решение (доказать). Это решение называют частным чисел α и β и обозначают α*/*β*.*

1.3. Логические операции

Математические рассуждения проводятся по правилам логики. Опери- рует логика с высказываниями, т.е. с предложениями, каждое из которых является либо истинным, либо ложным. Основные логические операции: — отрицание, *⇔* — равносильно, *⇒* — влечет за собой. Запись *A ⇒ B* означает, что высказывание *A* влечет высказывание *B* или, что то же самое, *B* следует из *A,* но мы записи *A ⇒ B* будем придавать и другую словесную интерпретацию, говоря, что *B* есть необходимый признак или необходимое условие *A.* Соотношение *A ⇔ B* означает, что высказывание *A* равносиль- но высказыванию *B* , но мы его будем читать также одним из следующих способов:

*A* необходимо и достаточно для *B, A* тогда и только тогда, когда *B, A,* если и только если *B.* Мы будем оперировать и с переменными высказываниями *P*(*x*)*,* т.е. с высказываниями, которые могут быть истинными при одних значениях *x* и ложными при других. Особенно важное значение имеют случаи:

1) *P*(*x*) истинно для всех *x*; 2) существует *x,* для которого *P*(*x*) истинно. Используя символы *∀* — для всех, *∃* — существует, два указанных случая можно записать кратко:

1) *∀x, P*(*x*); 2) *∃x, P*(*x*)*.* Важное значение для анализа имеют следующие правила отрицания:

(*∃x, P*(*x*)) *⇔ ∀x, P*(*x*); (*∀x, P*(*x*)) *⇔ ∃x, P*(*x*)*,*

10 Глава 1. Предел последовательности

которые означают следующее: для того чтобы образовать отрицание пред- ложения *∃x, P*(*x*) (*∀x, P*(*x*))*,* надо заменить в первом случае символ *∃* на символ *∀* (во втором случае — *∀* на *∃*)*,* а высказывание *P*(*x*)— на его от- рицание *P*(*x*)*.* Например, для предложения

*∀*ε *>* 0*,∃*δ *>* 0*,∀x ∈ U* : *|x − a|* ⩽ δ *⇒ |f*(*x*) *− A|* ⩽ ε

его отрицание формулируется следующим образом:

*∃*ε0 *>* 0*,∀*δ *>* 0*,∃x*0 *∈ U* : *|x*0 *− a|* ⩽ δ *⇒ |f*(*x*0) *− A| >* ε0*.*

При доказательствах будем часто использовать следующий принцип математич еской индукции:

если утверждение *P*(*n*)*, n ∈* N0*,* истинно при *n* = *m, m ∈* N0*,* и из истинности *P*(*n*) при *n* = *k>m* следует его истинность при *n* = *k* + 1*,* то *P*(*n*) истинно при всех *n* ⩾ *m.*

1.4. Предел последовательности

Если каждому натуральному числу (номеру) *n* поставлено в соответствие некоторое вещественное число *an,* то говорят, что задана числовая последо- вательность (или просто последовательность)

*a*1*,a*2*, ..., an, ... .* (1.5)

Для краткой записи последовательности (1.5) используют символ (*an*)*.*

Последовательность (1.5) называют ограниченной, если ограничено сверху и снизу множество *{an},* состоящее из элементов последовательности, т. е.

*∃M ∈* R*,∀n ∈* N *⇒ |an|* ⩽ *M.*

Последовательность

*ak*+1*,ak*+2*, ... ,ak*+*n, ...* (1.6)

называют о с т а т к о м последовательности (1.5). Множество членов последо- вательности (1.5), не входящих в остаток, конечно, поэтому, если ограничен один из остатков последовательности, то ограничена и вся последователь- ность.Последовательность (1.5) называют сходящейся, если существует число *a* такое, что

*∀*ε *>* 0*,∃*ν(ε) *>* 0*,∀n ∈* N : *n* ⩾ ν(ε) *⇒ |an − a|* ⩽ ε*.*

1.4. Предел последовательности 11

В противном случае последовательность (1.5) называют расходящейся. Если последовательность (1.5) сходится, то число *a,* из определения сходя- щейся последовательности, называют ее пределом и обозначают

*n→∞*lim *an* = *a* или *an n→∞→a.*

Геометрически выражение « *a* предел последовательности (*an*)» означа- ет, что какую бы ε-окрестность *U*ε(*a*) = *{x* : *|x − a| <* ε*}* точки *a* ни взять, все члены некоторого остатка последовательности попадут в *U*ε(*a*) (рис. 1.1).

*Рис. 1.1.* Предел последовательности

Пример 1.2. Покажем, что и рассмотрим цепочку неравенств

(*−*1)*n*2 *n*

*n→∞→*0*.* Возьмем произвольное ε *>* 0

∣∣∣(*−*1)*n*2

*n*

∣∣∣ ⩽ ε *⇔ n*2 ⩾ 1ε *⇔ n* ⩾ *√*1ε*,* (1.7)

из вательности, которой видим, можно что взять в качестве ν(ε)=1*/*ν(ε)*, √*ε*.* из Действительно, определения сходящейся для любого последо- *n*⩾ν(ε) из цепочки неравенств (1.7) имеем *|*(*−*1)*n/n*2*|* ⩽ ε*.*

***M***-лемма

*Если*

*∀*ε *>* 0*,∃*ν(ε) *>* 0*,∀n ∈* N : *n* ⩾ ν(ε) *⇒ |an − a|* ⩽ *M*ε*,*

*где M не зависит ни от* ε*, ни от n, то an n→∞→a.*

Доказательство. Если *M* = 0*,* то *an* = *a ∀n* ⩾ ν(1) и ясно, что *a*Существует *n n→∞→a.* Если же *M* = 0*,* то для произвольного ε возьмем ε ν(ε ) *>* 0*,∀n* ⩾ ν(ε ) *⇒ |an − a|* ⩽ *M*ε = *M*ε*/M* = ε*.* ⊲

= ε*/M.*

м а л Если о й. Ясно, *n→∞*lim *a*что *n* = последовательность 0*,* то последовательность (*an*) (*an*) сходится называют бесконечно к числу *a* тогда и толь- ко тогда, когда *an* можно представить в виде *an* = *a* + α*n,* где (α*n*) — бесконечно малая последовательность.

12 Глава 1. Предел последовательности

Пример 1.3. Покажем, что

1) *n→∞*lim *qn* = 0*,* 0 *< |q| <* 1; 2) *n→∞*

lim 2*nn* = 0; 3) *n→∞*

lim *√nn* = 1*.*

Действительно,

1) 0 *<* ε *<* 1*,|qn|* ⩽ ε *⇔ n*lg*|q|* ⩽ lgε *⇔ n* ⩾ lgε

lg*|q|,* ν(ε) := lgε

lg*|q|*;

2) ε *>* 0*,* 2*nn* ⩽ ε *⇔* (1 + *n*

1)*n* ⩽ ε *⇔* 1 + *n* + *n*(*n − n*

1)*/*2 + *...* + 1 ⩽ ε *⇐*

*⇐ n*(*n − n*

1)*/*2 ⩽ ε *⇔ n −* 2

1ε *⇔ n* ⩾ 2ε + 1*,* ν(ε) := 2ε + 1; 3) ε *>* 0*,| √nn −* 1*|* ⩽ ε *⇔ √nn −* 1 ⩽ ε *⇔ n* ⩽ (1 + ε)*n ⇔*

*⇔ n* ⩽ 1 + *n*ε + *n*(*n* 2 *−* 1)

ε2 + *...* + ε*n ⇐ n* ⩽ *n*(*n* 2 *−* 1)

ε2 *⇔*

*⇔ n* ⩾ ε22 + 1*,* ν(ε) := ε22 + 1*.*

1.5. Свойства сходящейся последовательности

1. Сходящаяся последовательность имеет лишь один предел. Доказательство. Тогда α*n* = *an −a,* Предположим противное: β*n* = *an −b* — две бесконечно *a*малые *n n→∞→a,* последовательности *an n→∞→b, a* = *b.*

и

*|a − b|* = *|*α*n −* β*n|* ⩽ *|*α*n|* + *|*β*n|.* (1.8) Возьмем ε = *|a − b|/*4*.* Из определения предела имеем

*∃*ν1 *>* 0*,∀n* ⩾ ν1 *⇒ |*α*n|* ⩽ *|a −* 4 *b|*

*,*

*∃*ν2 *>* 0*,∀n* ⩾ ν2 *⇒ |*β*n|* ⩽ *|a −* 4 *b|*

*.*

Отсюда

*|*α*n|* + *|*β*n|* ⩽ *|a −* 2 *b|*

*∀n* ⩾ max*{*ν1*,*ν2*}.* (1.9)

Из Поэтому неравенств сделанное (1.8), (1.9) предположение следует противоречивое о существовании неравенство у последовательности

*|a −* 2 *b|*

⩾*|a−b|.*

двух не равных пределов неверно. Но тогда *a* = *b.* ⊲

1.5. Свойства сходящейся последовательности 13

2. Сходящаяся последовательность ограничена. Доказательство. Возьмем ε = 1*, ∃*ν *>* 0*,∀n* ⩾ ν *⇒ |an − a|* ⩽ 1 *⇒ ⇒ a −* 1 ⩽ *an* ⩽ *a*+1*.* Остаток (*an*)*,n* ⩾ ν*,* ограничен, поэтому ограничена и вся последовательность.⊲

сумме 3. а) Если *a*их *n*+*b*пределов);

*n an→∞n →n→∞→a*+*b a,* (предел *bn n→∞→b,* то:

суммы сходящихся последовательностей равен

равен б) в) произведению *aabn nbnn n→∞→ab* (предел произведения сходящихся последовательностей

их пределов);

*n→∞ →*следовательностей *ab,* если *b* = 0*,bn* = 0 равен частному их *∀n* (предел частного сходящихся по- пределов, если предел знаменателя не равен нулю и *bn* = 0 *∀n*).

Доказательство. а), б). Для любого ε *>* 0*,*

*∃*ν (ε) *>* 0*,∀n* ⩾ ν (ε) *⇒ |an − a|* ⩽ ε*,*

*∃*ν (ε) *>* 0*,∀n* ⩾ ν (ε) *⇒ |bn − b|* ⩽ ε*.*

Согласно свойству 2, существует постоянная *M* такая, что *|an|* ⩽ *M ∀n.* Для любого *n* ⩾ max*{*ν (ε)*,*ν (ε)*}* имеем

*|an* + *bn − a − b|* ⩽ *|an − a|* + *|bn − b|* ⩽ 2ε*,*

*|anbn − ab|* = *|anbn − anb* + *anb − ab|* ⩽ *|an||bn − b|* + *b|an − a|* ⩽ *M*ε + *b*ε*.*

По Осталось *M*-лемме доказать *an* + *bn n→∞→*утверждение *a* + *b, anbn* в). *n→∞→*По *ab.*

ε1 = *|b|/*2 найдем ν(ε1) такое, что *∀n* ⩾ ν(ε1) *⇒ |bn − b|* ⩽ *|b|/*2*.* Отсюда

*||bn|−|b||* ⩽ *|bn − b|* ⩽ *|b|*2 *⇒ |b|*2 ⩽ *|bn|* ⩽ 32*|b|.*

Теперь для *n* ⩾ max*{*ν (ε)*,*ν (ε)*,*ν(ε1)*}* имеем

∣∣∣*abn n− ab*∣∣∣ =

∣∣∣*abn n− ab n*+ *ab n− ab*∣∣∣ ⩽ *|bb|an|*

*n||bn − b|* + *|b|*1*|an − a|* ⩽

⩽ *|b||b|/*2*M*

ε + *|b|*1ε =

(2*M|b|*2 + *|b|*1)ε*.* Согласно *M*-лемме, *abn nn→∞*

*→ab.* ⊲

14 Глава 1. Предел последовательности

4. Если *an →n→∞a, bn →n→∞b* и *an* ⩽ *bn ∀n ∈* N*,* то *a* ⩽ *b.* Доказательство. Предположим противное: *a > b.* Найдется ε *>* 0 та- кое, что *a −* ε *> b* + ε*.* Для достаточно больших *n an* ⩾ *a −* ε и *bn* ⩽ *b* + ε*,* поэтому *an > bn,* что противоречит условию. ⊲

5. Лемма о зажатой последовательности. Если *bn* ⩽*an* ⩽*cn ∀n ∈* N*, bn →n→∞d, cn →n→∞d,* то *an →n→∞d.*

Доказательство.

*∀*ε *>* 0*,∃*ν (ε) *>* 0*,∀n* ⩾ ν (ε) *⇒ |bn − d|* ⩽ ε*,d −* ε ⩽ *bn* ⩽ *d* + ε*,*

*∀*ε *>* 0*,∃*ν (ε) *>* 0*,∀n* ⩾ ν (ε) *⇒ |cn − d|* ⩽ ε*,d −* ε ⩽ *cn* ⩽ *d* + ε*.* Отсюда *∀n* ⩾ max*{*ν (ε)*,*ν (ε)*}d −* ε ⩽ *an* ⩽ *d* + ε*,*

т. е. *an →n→∞d.* ⊲

6. Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную является бесконечно малой последовательностью.

Доказательство. Пусть *an →n→∞*0*,* а *|bn|* ⩽ *M −* const *∀n ∈* N*.* Тогда

*∀*ε *>* 0*,∃*ν(ε) *>* 0*,∀n* ⩾ ν(ε) *⇒ |an|* ⩽ ε *⇒ |anbn|* ⩽ *M*ε*.*

По *M*-лемме *anbn →n→∞*0*.* ⊲

1.6. Бесконечно большая последовательность

Последовательность (*an*) называют бесконечно большой, если

*∀*ε *>* 0*,∃*ν(ε) *>* 0*,∀n ∈* N : *n* ⩾ ν(ε) *⇒ |an|* ⩾ ε*.*

Другими словами, последовательность бесконечно большая, если, какое бы число ε *>* 0 мы ни взяли, найдется число ν(ε) *>* 0 такое, что все члены по- следовательности с номерами большими ν(ε)*,* находятся вне ε-окрестности нуля (рис. 1.2).

*Рис. 1.2*

1.7. Монотонная последовательность 15

Если последовательность (*an*) бесконечно большая, то говорят, что она имеет б е с к о н е ч н ы й Свойства бесконечно п р е д больших е л, и пишут последовательностей

*n→∞*lim *an* = *∞.*

(1. Если (*an*) — бесконечно большая последовательность и *an* = 0*,* то 1*/an*)

— бесконечно малая. Доказательство. Возьмем произвольное ε *>* 0*.* Пусть ε = 1*/*ε

*∃*ν(ε ) *>* 0*,∀n* ⩾ ν(ε ) *⇒ |an|* ⩾ ε *⇒*

∣∣∣ *a*1*n*∣∣∣ ⩽ ε 1= ε*.* ⊲

(2. Если (*an*) — бесконечно малая последовательность и *an* = 0*,* то 1*/an*)

— бесконечно большая. Свойство 2 устанавливается аналогично свойству 1. Среди бесконечно больших последовательностей (*an*) выделяют два типа последовательностей

1)*∀*ε *>* 0*,∃*ν(ε) *>* 0*,∀n ∈* N : *n* ⩾ ν(ε) *⇒ an* ⩾ ε;

2)*∀*ε *>* 0*,∃*ν(ε) *>* 0*,∀n ∈* N : *n* ⩾ ν(ε) *⇒ an* ⩽ *−*ε*.*

В первом случае во втором — *n→∞*lim говорят, *an* = *−∞.*

что (*an*) имеет предел +*∞* и пишут *n→∞*lim *an* = +*∞,*

1.7. Монотонная последовательность

Последовательность (*an*) называют строго возрастающей, если *a*1 *< a*2 *< ... < an < ....* Если *a*1 ⩽ *a*2 ⩽ *...* ⩽ *an* ⩽ *...,* то (*an*) называют возрастающей последовательностью. Аналогично определяют строго у б ы в а ю щ и е и у б ы в а ю щ и е последовательности. Все эти последователь- ности называют м о н о т о н н ы м и.

Теорема о монотонной ограниченной последовательности *Каждая ограниченная монотонная последовательность сходится.*

Доказательство для возрастающей последовательности. По теореме о гранях (п. 1.4) sup*{an}* = *a ∈* R*.* Из определения точной верхней грани следует, что *an* ⩽ *a ∀n ∈* N и *∀*ε *>* 0*,∃n*ε *∈* N : *a −* ε *< an*ε*.* Теперь, используя монотонность последовательности, имеем

*∀*ε *>* 0*,∃*ν(ε) = *n*ε*,∀n* ⩾ ν(ε) *⇒* 0 ⩽ *a − an* ⩽ ε*,*

т. е. *n→∞*lim *an* = *a.* ⊲

16 Глава 1. Предел последовательности

Замечание 1.2. Если последовательность (*an*)*,* возрастающая и неогра- ниченная, то, используя доказательство теоремы о монотонной ограниченной последовательности, можно показать, что lim *n→∞an* = +*∞,* если же (*an*) — неограниченная убывающая последовательность, то lim *n→∞an* = *−∞.*

Таким образом, любая монотонная последовательность имеет предел, ко- нечный, если она ограничена, или бесконечный определенного знака, если она не ограничена. Напомним, что мы говорим «последовательность сходит- ся» лишь в случае, когда ее предел принадлежит R*.*

1.8. Принцип выбора

Рассмотрим последовательность

*a*1*, ... ,an, ... .* (1.10)

Если из (1.10) удалить часть элементов, но так, чтобы осталось бесконечно много членов последовательности, то получим п о д п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь этой последовательности

*an*1*, ... ,ank, ... , n*1 *< n*2 *<...<nk < ... .*

Теорема о выборе монотонной подпоследовательности *Из любой последовательности можно выбрать монотонную подпоследо- вательность.*

Доказательство. Любая последовательность обладает одним из двух свойств:

1) каждый остаток последовательности имеет наибольший элемент, 2) существует остаток последовательности, не имеющий наибольшего эле- мента.

В первом случае можно выбрать монотонно убывающую подпоследова- тельность. Пусть *an*1 — наибольший элемент всей последовательности, *an*2 — один из наибольших элементов остатка, начинающегося с номера *n*1 + 1*, an*3 — один из наибольших элементов остатка, начинающегося с номера *n*2+1*,* и т. д. Тогда *an*1 ⩾*an*2 ⩾*an*3 ⩾ *...* и, следовательно, *an*1*,an*2*, ...* — монотонная подпоследовательность последовательности (1.10).

Во втором случае можно выбрать монотонно возрастающую подпоследо- вательность. Пусть *am,am*+1*, ...* — остаток без наибольшего элемента. Тогда и все последующие остатки не имеют наибольших элементов. Положим *an*1 = = *am.* В остатке, начинающемся с номера *n*1*,* нет наибольшего, поэтому най- дется элемент *an*2 *> an*1*.* Затем рассмотрим остаток, начинающийся с номера

1.9. Число *e* 17

*n*2*,* и выберем элемент *an*3 *> an*2 и т. д. Последовательность *an*1*,an*2*, ...* — возрастающая подпоследовательность последовательности (1.10). ⊲

Принцип выбора

*Из любой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть (1.10) — ограниченная последовательность. На основании теоремы о выборе монотонной подпоследовательности из (1.10) можно выбрать монотонную подпоследовательность, которая вместе с после- довательностью тоже ограничена. По теореме о монотонной ограниченной последовательности выделенная подпоследовательность сходится. ⊲

1.9. Число ***e***

Рассмотрим последовательность *an* = нома Ньютона

(1+ *n*1)*n.* Используя формулу би-

(*a*+*b*)*n* = *anb*0+ 1!*nan−*1*b*1+ *n*(*n* 2! *−* 1)

*an−*2*b*2+*...*+ *n*(*n −* 1)*···*(*n n*! *− n* + 1)

*a*0*bn,*

выражения

(1 + *n*1)*n* и

(1 + *n* + 1

1)*n*+1 представим в виде

(1 + *n*1)*n* =1+1+ 2!1(1 *− n*1)

+ *...* + *n*!1(1 *− n*1)*···*(1 *− n − n*

1

)*,* (1.11)

(1+ *n* + 1

1)*n*+1 = 1+1+ 2!1(1*− n* + 1

1)+*...*+ (*n* + 1

1)!(1*− n* + 1

1)*···*(1*− n* + *n*

1)*.*

При переходе от *an* к *an*+1 все слагаемые в правой части равенства (1.11) не убывают и добавляется еще одно положительное слагаемое, поэтому *an*+1 *> > an.* Кроме того,

*an <* 1+1+ 2! 1+ *...* + *n*! 1*<* 2 + 12 + 212 + *...* + 2*n−*1 1

*<* 3*.*

Последовательность (1 + 1*/n*)*n* возрастающая и ограниченная, следователь- но, по теореме о монотонной ограниченной последовательности она сходится. Ее предел обозначают через *e.*

Число *e* является иррациональным *e* = 2*,*7182 *... .*

18 Глава 1. Предел последовательности

1.10. Критерий Коши

Говорят, что последовательность (1.10) удовлетворяет у с л о в и ю К о ш и, если

*∀*ε *>* 0*,∃*ν(ε) *>* 0*,∀n, m ∈* N : *n, m* ⩾ ν(ε) *⇒ |an − am|* ⩽ ε*.* (1.12)

Последовательность, удовлетворяющую условию Коши, называют фундаментальной.

Критерий Коши сходимости последовательности *Для сходимости последовательности необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

Доказательство. Необходимость. Если *an →n→∞a,* то

*∀*ε *>* 0*,∃*ν(ε2)

*>* 0*,∀n* ⩾ ν(ε2)

*⇒ |an − a|* ⩽ ε2*, ∀m* ⩾ ν(ε2)

*⇒ |am − a|* ⩽ ε2*.* Отсюда для любых *n, m* ⩾ ν(ε*/*2) имеем

*|an − am|* = *|an − a* + *a − am|* ⩽ *|an − a|* + *|am − a|* ⩽ ε*.*

Достаточность. Фиксируя в неравенстве (1.12) ε и *m,* получаем

*am −* ε ⩽ *an* ⩽ *am* + ε *∀n* ⩾ ν(ε)*,*

т. е. остаток последовательности, начинающийся с номера большего, чем ν(ε)*,* ограничен, но тогда ограничена и последовательность. На основании прин- ципа выбора из последовательности (1.10) можно выделить сходящуюся под- последовательность *ank →k→∞a.* Поскольку последовательность (1.10) фунда- ментальная, то

*∀*ε *>* 0*,∃*ν(ε) *>* 0*,∀n, nk* ⩾ν(ε) *⇒ |an −ank|*⩽ε *⇒ ank −*ε⩽*an* ⩽*ank* +ε*.* (1.13)

Переходя в неравенстве (1.13) к пределу при *k → ∞,* получаем

*a −* ε ⩽ *an* ⩽ *a* + ε *∀n* ⩾ ν(ε)*,*

что означает *an →n→∞a.* ⊲

Очевидно, что определение фундаментальной последовательности можно также сформулировать следующим образом:

*∀*ε *>* 0*,∃*ν(ε) *>* 0*,∀n ∈* N : *n* ⩾ ν(ε)*,∀p ∈* N *⇒ |an − an*+*p|* ⩽ ε*.*

1.11. Верхний и нижний пределы 19

Пример 1.4. Покажем, что последовательность

*an* =1+ cos 2 1

+ *...* + cos*n*

2*n*

является фундаментальной, следовательно, сходящейся. Действительно,

*∀*ε*,*0 *<* ε *<* 1*,|an − an*+*p|* =

∣∣∣cos(*n* 2*n*+1 + 1)

+ *...* + cos(*n* 2*n*+*p*

+ *p*)

∣∣∣ ⩽ ε *⇐*

*⇐*

∣∣∣ 2*n*+1 1

+ *...* + 2*n*+*p*1

∣∣∣ ⩽ ε *⇔* 12*n*(12 + *...* + 21*p*)

⩽ ε *⇐*

*⇐* 21*n* ⩽ ε *⇔ n* ⩾ log2 1ε*,*ν(ε) := log2 1ε*.*

Пример 1.5. Покажем, что последовательность

*an* =1+ 12 + *...* + *n* 1является расходящейся. Используя правила отрицания (п. 1.3), сформулиру- ем определение нефундаментальной последовательности

*∃*ε0 *>* 0*,∀*ν *>* 0*,∃n*0 *∈* N : *n*0 ⩾ ν*,∃p*0 *∈* N *⇒ |an*0 *− an*0+*p*0*| >* ε0*.*

Для доказательства расходимости рассматриваемой последовательности достаточно показать, что она не является фундаментальной. Пусть ε0 = 1*/*4*.* Для произвольного ν *>* 0 в качестве *n*0*,p*0 возьмем числа *n*0 = [ν]+1*,p*0 = = 2*n*0*,* тогда*|an*0 *− a*2*n*0*|* =

∣∣∣ *n*0 1

+ 1 + *...* + 2*n*10∣∣∣ ⩾ 2*n*10*n*0 = 12 *>* ε0*.*

1.11. Верхний и нижний пределы

Рассмотрим последовательность

*a*1*, ... ,an, ... .* (1.14)

Предел *a* (конечный или бесконечный, определенного знака) некото- рой подпоследовательности частичным пределом последовательности (*ank*) последовательности (1.14) называют (1.14). Пусть *L* — множе- ство ее частичных пределов. Точную верхнюю (нижнюю) грань множества *L* называют верхним (нижним) пределом последовательности (1.14)

20 Глава 1. Предел последовательности

и обозначают lim *n→∞an* ( lim

*n→∞an*). Например, последовательность *an* = (*−*1)*n* имеет два частичных предела +1*,−*1*,* следовательно,

lim *n→∞*(*−*1)*n* = 1*,* lim *n→∞*(*−*1)*n* = *−*1*.*

Из теоремы о гранях и замечания к ней, из теоремы о выборе монотонной подпоследовательности и из теоремы о монотонной и ограниченной последо- вательности и замечания к ней следует, что любая последовательность имеет верхний и нижний пределы, причем верхний предел является числом, если последовательность ограничена сверху, и символом +*∞* в противном слу- чае, нижний предел — число, если последовательность ограничена снизу, и символ *−∞* в противном случае.

Критерий совпадения верхнего и нижнего пределов *Нижний и верхний пределы последовательности совпадают в том и только том случае, когда последовательность имеет предел конечный или бесконечный определенного знака, причем в этом случае*

lim *n→∞an* = lim

*n→∞an* = lim *n→∞an.*

Доказательство. Необходимость. Пусть

lim *n→∞an* = lim

*n→∞an* = *a ∈* R*.* (1.15)

Предположим, что последовательность (*an*) не стремится к *a.* Исполь- зуя правила отрицания (п. 1.3), утверждение, что lim *n→*+*∞an* = *a* с помощью « ε-δ», формулируется следующим образом:

*∃*ε0 *>* 0*,∀*ν *>* 0*,∃n*0 *∈* N : *n*0 ⩾ ν *⇒ |an*0 *− a| >* ε0*.*

Отсюда вытекает, что для каждого *k ∈* N найдем номер *nk* ⩾ *k* такой, что

*|ank − a| >* ε0*.* (1.16)

Из неравенства (1.16) следует, что любой частичный предел подпоследова- тельности (*ank*) отличен от *a,* что противоречит равенству (1.15). Анало- гично рассматриваются случаи *a* = *−∞, a* = +*∞.*

Достаточность. Если предел последовательности (*an*) равен *a,* то любая ее подпоследовательность стремится к *a.* Значит, множество частичных пре- делов состоит из одного элемента *a* и, следовательно, lim *n→∞an* = *a,* lim

*n→∞an* = = *a.* ⊲

*ГЛАВА 2*

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

2.1. Функции

Функцией, определенной на множестве *X* со значениями в множе- стве *Y,* называют соответствие *f,* которое каждому элементу *x ∈ X* от- носит единственный элемент *y* из *Y,* обозначаемый *f*(*x*)*.* Множество *X* называют множеством задания функции. Совокупность всех элемен- тов *f*(*x*)*, x ∈ X,* называют множеством значений функции *f.* Тот факт, что *f* — функция, заданная на *X* со значениями в *Y,* обозначают одним из следующих способов:

*f* : *X → Y* ; *X →Y f*; *y* = *f*(*x*)*, x ∈ X, y ∈ Y.*

Иногда вместо слова «функция» используют слово «отображение». В определении функции множества *X* и *Y* могут быть множествами любой природы. Если *X ⊂* R*,Y ⊂* R*,* то функцию называют вещественной или скалярной. Пока будем рассматривать лишь скалярные функции. Графиком Γ*f* скалярной функции *f* называют множество точек плос- кости 0*xy* с координатами (*x, f*(*x*))*, x ∈ X*

Γ*f* = *{*(*x, y*) : *x ∈ X, y* = *f*(*x*)*}*

(здесь и в дальнейшем, когда говорится о плоскости 0*xy,* то имеется в виду плоскость, на которой задана декартова прямоугольная система координат с осями *x, y* ).

Линейная функция: *y* = *kx* + *b, k, b ∈* R*.* Графиком линейной функции служит прямая (рис. 2.1), образующая угол φ с осью 0*x* такой, что tgφ = *k,* и проходящая через точку (0*,b*)*.*

Квадратичная функция: *y* = *ax*2 + *bx* + *c, a, b, c ∈* R*, a* = 0*.* График квадратичной функции — парабола (рис. 2.2), вершина которой

находится в точке

(

*−* 2*ab,* 4*ac − b*2

4*a*

)*,* и пересекающаяся с осью 0*y* в точке (0*,c*)*.*

22 Глава 2. Предел и непрерывность функции

*Рис. 2.1.* Графики функций *y* = *x* (пунктирная прямая) и *y* = *−x/*2 *−* 1

*Рис. 2.2.* Графики функций *y* = *x*2 (пунктирная кривая) и *y* = *−x*2*−x*+1

Многочлен степени ***n*** : *y* = *anxn* + *an−*1*xn−*1 + *...* + *a*0*, ai ∈* R*, i* = = 0*,*1*, ..., n, an* = 0 (рис. 2.3).

Рациональная функция: *y* = степени *n* и *m, m* = 0 (рис. 2.4).

*QPm*(*x*)*n*(*x*)

*, Pn*(*x*)*, Qm*(*x*) — многочлены

*Рис. 2.3.* Графики функций *y* = *x*3 и *y* = *x*4 (пунктирная кривая)

*Рис. 2.4.* Графики функций *y* = 1*/x* и *y* = 1*/x*2 (пунктирная кривая)

Тригонометрические функции: *y* = sin*x, y* = cos*x, y* = tg*x, y* = = ctg*x* (рис. 2.5—2.8).

*Рис. 2.5.* Графики функций *y* = sin *x, y* = sin 2*x* (пунктирная кривая)

*Рис. 2.6.* Графики функций *y* = cos *x, y* = cos 3*x* (пунктирная кривая)

2.1. Функции 23

*Рис. 2.7.* Графики функций *y* = tg *x, y* = tg(*x/*2) (пунктирная кривая)

*Рис. 2.8.* Графики функций *y* = ctg *x, y* = ctg 2*x* (пунктирная кривая)

Для отображений *f* : *X → Y* и *g* : *Y → T* с помощью формулы *h*(*x*) = *g*(*f*(*x*)) можно построить функцию *h* : *X → T,* которую называют к о м п о з и ц и е й функций *f* и *g* и обозначают *g ◦f.* Композицию функций часто называют с л о ж н о й функцией.

Отображение *f* : *X → Y* называют: — с ю р ъ е к т и в н ы м, если*∀y ∈ Y,∃x ∈ X ⇒ y* = *f*(*x*);

— и н ъ е к т и в н ы м, если

*∀x*1*,x*2 *∈ X* : *x*1 = *x*2 *⇒ f*(*x*1) = *f*(*x*2);

— б и е к т и в н ы м, если оно сюръективно и инъективно одновременно.

Для биективного отображения *f* : *X → Y* можно построить отображение из *Y* в *X,* которое каждому *y ∈ Y* ставит в соответствие элемент *x* из *X* такой, что *f*(*x*) = *y.* Это отображение *g* : *Y → X* называют о б р а т н ы м к *f* и обозначают *f−*1*.* Из определения обратного отображения следует, что (*f−*1 *◦f*)(*x*) = *x ∀x ∈ X* и (*f ◦f−*1)(*y*) = *y ∀y ∈ Y.* Множеством определе- ния обратной функции *f−*1 служит множество *Y,* а множеством значений — множество *X.* Так как точке (*x, y*) графика функции *f* соответствует сим- метричная относительно прямой *y* = *x* точка (*y,x*) графика *f−*1*,* то графи- ки прямой и обратной функций симметричны относительно прямой *y* = *x.*

Функции *y* = arcsin*x* (рис. 2.9); *y* = arccos*x* (рис. 2.10); *y* = arctg*x* (рис. 2.11); *y* = arcctg*x* (рис. 2.12) являются обратными соответственно для функций *y* = sin*x, x ∈* [*−*π*/*2*,* π*/*2]; *y* = cos*x, x ∈* [0*,* π]; *y* = tg*x, x ∈ ∈* (*−*π*/*2*,* π*/*2); *y* = ctg*x, x ∈* (0*,*π)*.*

24 Глава 2. Предел и непрерывность функции

*Рис. 2.9.* График функции *y* = arcsin *x Рис. 2.10.* График функции *y* = arccos *x*

*Рис. 2.11.* График функции *y* = arctg *x Рис. 2.12.* График функции *y* = arcctg *x*

Поскольку *−*π*/*2 *<* arctg *x <* π*/*2*,* 0 *<* arcctg *x <* π*,* то функции *y* = = arctg *x, y* = arcctg *x* ограничены.

2.2. Предел функции

Пусть функция *f* определена в Δ-окрестности *U*Δ(*c*) точки *c,* т. е. на интервале длины 2Δ с центром в точке *c*

*U*Δ(*c*) = *{x ∈* R : *|x − c| <* Δ*},* Δ *>* 0*,*

за ислючением, быть может, точки *c.* Множество *U*Δ(*c*) *\ {c}* называют проколотой Δ-окрестностью точки *c.*

Говорят, что функция *f* имеет предел при *x → c,* если существует число *A* такое, что

*∀*ε *>* 0*,∃*δ(ε) *>* 0*,∀x ∈ U*Δ(*c*):0 *< |x − c|* ⩽ δ(ε) *⇒ |f*(*x*) *− A|* ⩽ ε*.*

Если функция *f* имеет предел при *x → c,* то число *A* из приведенного выше определения называют ее п р е д е л о м и обозначают lim *x→cf*(*x*) = *A* или

2.2. Предел функции 25

*f*(*x*) *→x→cA.* Если функция *f*(*x*) определена в точке *x* = *c* и lim *x→cf*(*x*) = *A,* то не обязательно *A* = *f*(*c*)*.*

Геометрически lim *x→cf*(*x*) = *A* означает, что какую бы горизонтальную по- лосу вдоль прямой *y* = *A* ни взять, всегда найдется вертикальная полоса с осью симметрии *x* = *c* такая, что все точки графика функции *f,* располо- женные в вертикальной полосе, кроме, может быть, точки, находящейся на прямой *x* = *c,* попадут во взятую горизонтальную полосу (рис. 2.13).

*Рис. 2.13.* Число А — предел функции

Аналогично *M*-лемме для последовательностей доказывается следующее утверждение.

***M***-лемма для предела функции *Если∀*ε *>* 0*,∃*δ(ε) *>* 0*,∀x ∈ U*Δ(*c*):0 *< |x − c|* ⩽ δ(ε) *⇒ |f*(*x*) *− A|* ⩽ *M*ε*.*

*где M не зависит ни от x, ни от* ε*, то f*(*x*) *→x→cA.*

Пример 2.1. Докажем, что lim *x→*2*x*2 = 4*.* Пусть *U*1(2) = *{x* : *|x−*2*| <* 1*}.* Возьмем произвольное ε *>* 0*.* Для любого *x ∈ U*1(2) имеет место следующая цепочка неравенств

*|x*2 *−* 4*|* ⩽ ε *⇔ |x −* 2*||x* + 2*|* ⩽ ε *⇐ |x −* 2*|* ⩽ ε5*,*

из которой видим, что в качестве числа δ(ε)*,* о котором идет речь в опреде- лении предела функции, можно взять δ(ε) = min*{*ε*/*5; 1*}.*

26 Глава 2. Предел и непрерывность функции

Критерий Гейне *Для того чтобы функция f*(*x*) *имела предел A при x → c, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности xn →n→∞c, xn* = *c, последовательность f*(*xn*) *сходилась к A, т. е.* lim *n→∞f*(*xn*) = *A.*

Доказательство. Необходимость. Возьмем ε *>* 0 и последовательность *xn →n→∞c, xn* = *c.* Поскольку lim *x→cf*(*x*) = *A,* то

*∃*δ(ε) *>* 0*,∀x ∈ U*Δ(*c*):0 *< |x − c|* ⩽ δ(ε) *⇒ |f*(*x*) *− A|* ⩽ ε*.* (2.1)

Из условия *xn →n→∞c, xn* = *c,* имеем

*∃*ν(ε) *>* 0*,∀n* ⩾ ν(ε) *⇒* 0 *< |xn − c|* ⩽ δ(ε)*.* (2.2)

Из соотношений (2.1), (2.2) следует

*∃*ν(ε) *>* 0*,∀n* ⩾ ν(ε) *⇒ |f*(*xn*) *− A|* ⩽ ε*,*

что означает lim *n→∞f*(*xn*) = *A.*

Достаточность. От противного. Предположим, что lim *x→cf*(*x*) = *A.* Исполь- зуя правила отрицания (п. 1.3), последнее утверждение с помощью « ε-δ » формулируется следующим образом:

*∃*ε0 *>* 0*,∀*δ *>* 0*,∃x*0 *∈ U*Δ(*c*):0 *< |x*0 *− c|* ⩽ δ *⇒ |f*(*x*0) *− A| >* ε0*.*

Отсюда следует, что для каждого δ*n* = 1*/n, n ∈* N*,* найдется точка *xn* такая, что

0 *< |xn − c|* ⩽ 1*n, |f*(*xn*) *− A| >* ε0*.* Из неравенств 0 *< |xn − c|* ⩽ 1*n* вытекает, что последовательность (*xn*) стре- мится к *c* и *xn* = *c,* а из неравенства *|f*(*xn*) *− A| >* ε0*,* что последова- тельность (*f*(*xn*)) не сходится к *A,* но это противоречит условию критерия Гейне. ⊲

2.3. Односторонние и бесконечные пределы

Пусть функция *f* определена в п р а в о с т о р о н н е й Δ-окрестности *V*Δ(*c*) = *{x* : *c*⩽*x<c*+Δ*},*Δ *>* 0*,* точки *x* = *c,* за ислючением, быть может, точки *c.*

Говорят, что функция *f* имеет предел справа при *x → c,* если су- ществует число *A* такое, что

*∀*ε *>* 0*,∃*δ(ε) *>* 0*,∀x ∈ V*Δ(*c*):0 *< x − c* ⩽ δ(ε) *⇒ |f*(*x*) *− A|* ⩽ ε*.*

2.3. Односторонние и бесконечные пределы 27

Если функция *f* имеет предел справа при *x → c,* то число *A* называют ее правосторонним пределом и обозначают *A* = lim *x→c*+0*f*(*x*) = *f*(*c* + 0) или *f*(*x*) *→ x→c*+0*A.*

Геометрически lim *x→c*+0*f*(*x*) = *A* означает, что какую бы горизонтальную полосу вдоль прямой *y* = *A* ни взять, всегда найдется вертикальная по- лоса, лежащая правее прямой *x* = *c,* такая, что все точки графика функ- ции *f,* расположенные в вертикальной полосе, кроме, быть может, точки находящейся на прямой *x* = *c,* попадут во взятую горизонтальную полосу (рис. 2.14).

Говорят, что функция *f,* определенная в левосторонней Δ-окрестности *Z*Δ(*c*) = *{x* : *c −* Δ *< x* ⩽ *c},* Δ *>* 0*,* точки *c,* за ислючением, быть может, точки *c,* имеетпредел слева при *x → c,* если существует число *A* такое, что

*∀*ε *>* 0*,∃*δ(ε) *>* 0*,∀x ∈ Z*Δ(*c*):0 *< c − x* ⩽ δ(ε) *⇒ |f*(*x*) *− A|* ⩽ ε*.* Левосторонний предел функции обозначают *A* = lim *x→c−*0*f*(*x*) = *f*(*c −* 0) или *f*(*x*) *→ x→c−*0*A* (рис. 2.15).

*Рис. 2.14.* Число А — предел справа *Рис. 2.15.* Число А — предел слева

Из определений предела и односторонних пределов функции сразу выте- кает следующий критерий.

Критерий равенства односторонних пределов *Для того чтобы функция f имела равные односторонние пределы f*(*c*+0)*, f*(*c −* 0)*, необходимо и достаточно, чтобы она имела предел при x → c, причем в этом случаеf*(*c* + 0) = lim *x→cf*(*x*) = *f*(*c −* 0)*.*

Говорят, что функция *f,* определенная на множестве [*a,*+*∞*)*,* имеет пре- дел при *x →* +*∞,* если существует число *A* такое, что

*∀*ε *>* 0*,∃*δ(ε) *>* 0*,∀x ∈* [*a,*+*∞*) : *x* ⩾ δ(ε) *⇒ |f*(*x*) *− A|* ⩽ ε*.*

28 Глава 2. Предел и непрерывность функции

Обозначают *A* = *x→*+*∞*lim *f*(*x*) = *f*(+*∞*) или *f*(*x*) *x→*+*∞→ A.*

Аналогично, *A* = *x→−∞*lim *f*(*x*) = *f*(*−∞*)*,* если

*∀*ε *>* 0*,∃*δ(ε) *>* 0*,∀x ∈* (*−∞,a*] : *x* ⩽ *−*δ(ε) *⇒ |f*(*x*) *− A|* ⩽ ε*.*

Бесконечные пределы Говорят, что функция *f* : *U*Δ *→* R стремится к бесконечности при *x → c* (или предел функции равен бесконечности), если

*∀*ε *>* 0*,∃*δ(ε) *>* 0*,∀x ∈ U*Δ(*c*):0 *< |x − c|* ⩽ δ(ε) *⇒ |f*(*x*)*|* ⩾ ε*,*

обозначают *x→c*lim *f*(*x*) = *∞.* Аналогично,

*x→c*lim *f*(*x*)=+*∞* :

*∀*ε *>* 0*,∃*δ(ε) *>* 0*,∀x ∈ U*Δ(*c*):0 *< |x − c|* ⩽ δ(ε) *⇒ f*(*x*) ⩾ ε;

*x→c*lim *f*(*x*) = *−∞* : *∀*ε *>* 0*,∃*δ(ε) *>* 0*,∀x ∈ U*Δ(*c*):0 *< |x − c|* ⩽ δ(ε) *⇒ f*(*x*) ⩽ *−*ε*.*

Для односторонних и бесконечных пределов имеет место критерий Гейне с соответствующими изменениями. Сформулируем критерий Гейне, например, для *→ c−*0 случая тогда *x→c−*0lim и только *f*(*x*)=+*∞* тогда, когда : функция *f*(*x*) стремится к для любой последовательности *xn < c,* Критерий последовательность Гейне позволяет *f*(*x*распространить *n*) стремится к свойства +*∞,* т. е. предела *n→∞*lim +*∞* при *x → f*(*xn*)=+*∞. xn n→∞→c,*

последова- тельности на предел функции.

Свойства предела функции 1. Функция не может иметь более одного предела. Доказательство. = *B,A* = *B.* Предположим противное: Возьмем последовательность *xn → x→c*lim *c, f*(*x*) *xn* = = *c. A,* По *x→c*lim критерию *f*(*x*) =

Гейне ность (*f*(*xf*(*xn*) *n*)) *n→∞→*не *A,* может *f*(*x*иметь *n*) *n→∞→*более *B,* что одного невозможно, предела (п. так 1.5). как ⊲

последователь-

2. а) б) в) Если *f*(*x*) *f*(*x*)*g*(*x*) *f*(*x*) *g*(*x*) + *x→c*

*f*(*x*) *→g*(*x*) *x→c→x→c→x→c→AB*;

*A A ∈* + R*, B*;

*g*(*x*) *x→c→B ∈* R*,* то

*BA,* если *B* = 0 (доказать).

2.3. Односторонние и бесконечные пределы 29

3. Если *f*(*x*) *→x→cA, g*(*x*) *→x→cB* и *f*(*x*) ⩽ *g*(*x*) для всех *x* из некоторой проколотой окрестности точки *x* = *c,* то *A* ⩽ *B* (доказать).

4. Если *h*(*x*) ⩽ *f*(*x*) ⩽ *g*(*x*) для всех *x* из некоторой проколотой окрест- ности точки *x* = *c* и *h*(*x*) *→x→cA, g*(*x*) *→x→cA,* то *f*(*x*) *→x→cA* (доказать).

5. Произведение бесконечно малой при *x → c* функции *f*(*x*)*,* т.е. та- кой функции, что lim *x→cf*(*x*)=0*,* на ограниченную в некоторой проколотой окрестности точки *x* = *c* функцию снова является бесконечно малой при *x → c* функцией (доказать).

Критерий Коши существования предела функции *Функция f* : *U*Δ(*c*) *\ {c} →* R *имеет предел при x → c тогда и только тогда, когда*

*∀*ε *>* 0*,∃*δ(ε) *>* 0*,∀x ,x ∈ U*Δ(*c*) :

0 *< |x − c|* ⩽ δ(ε)*,*0 *< |x − c|* ⩽ δ(ε) *⇒ |f*(*x* ) *− f*(*x* )*|* ⩽ ε*.* (2.3)

Доказательство. Необходимость. Если *f*(*x*) *→x→cA,* то

*∀*ε *>* 0*,∃*δ(ε*/*2) *>* 0*,∀x ∈ U*Δ(*c*):0 *< |x − c|* ⩽ δ(ε*/*2) *⇒ |f*(*x*) *− A|* ⩽ ε*/*2*.*

Отсюда *∀x ,x ∈ U*Δ(*c*):0 *< |x − c|* ⩽ δ(ε*/*2)*,*0 *< |x − c|* ⩽ δ(ε*/*2) имеем

*|f*(*x* ) *− f*(*x* )*|* = *|f*(*x* ) *− A* + *A − f*(*x* )*|* ⩽ ε*.*

Достаточность. Возьмем последовательность *xn → c, xn* = *c* и ε *> >* 0*.* Из условия (2.3) найдем δ(ε)*.* Существует ν(δ(ε)) *>* 0 такое, что *∀n* ⩾ ν(δ(ε))*,∀m* ⩾ ν(δ(ε)) имеем *|xn − c|* ⩽ δ(ε)*,|xm − c|* ⩽ δ(ε)*.* Отсюда и из условия (2.3) вытекает *|f*(*xn*) *− f*(*xm*)*|* ⩽ ε*,* т. е. последовательность (*f*(*xn*)) является фундаментальной. По критерию Коши сходимости последователь- ности существует число *A* такое, что *f*(*xn*) *→ A.*

Из условия (2.3) имеем

*∀n* ⩾ ν(δ(ε))*,∀x ∈ U*Δ(*c*):0 *< |x − c|* ⩽ δ(ε) *⇒*

*⇒ |f*(*x*) *− f*(*xn*)*|* ⩽ ε *⇒ f*(*xn*) *−* ε ⩽ *f*(*x*) ⩽ *f*(*xn*) + ε*.* (2.4) Переходя в неравенстве (2.4) к пределу при *n → ∞,* получаем

*A −* ε ⩽ *f*(*x*) ⩽ *A* + ε*,*

что означает *f*(*x*) *→x→cA.* ⊲

30 Глава 2. Предел и непрерывность функции

Пример 2.2. Покажем, что функция *y* = sin*x* не имеет предела при *x →* +*∞.* Возьмем две последовательности *x n* = 2π*n, x n* = π*/*2+2π*n,* стре- мящиеся к +*∞.* Соответствующие последовательности значений функции sin*x n* = 0*,* sin*x n* = 1 стремятся к разным пределам 0 и 1. Отсюда и из критерия Гейне следует, что sin*x* не имеет предела при *x →* +*∞.*

2.4. Замечательный тригонометрический предел

Теорема о замене переменной при вычислении предела *Если*

*x→c*lim φ(*x*) = *b,* lim *t→bf*(*t*) = *A, причем* φ(*x*) = *b в некоторой проколотой окрестности точки c, то*

*x→c*lim *f*(φ(*x*)) = *A.*

Доказательство. По критерию Гейне

*∀xn → c, xn* = *c ⇒* φ(*xn*) *→ b.*

По условию теоремы *tn* = φ(*xn*) = *b.* Опять по критерию Гейне *f*(*tn*) *→ → A* или *f*(φ(*xn*)) *→ A.* Отсюда, согласно критерию Гейне, имеем *f*(φ(*x*)) *x→c→A.* ⊲

Замечание 2.1. Справедливы также утверждения, аналогичные теореме о замене переменной при вычислении предела, и для односторонних пределов, например, если *x→c−*0lim φ(*x*) = *b, t→b*+0lim *f*(*t*) = *A,* причем φ(*x*) *> b* в некото- рой проколотой правосторонней окрестности точки *c,* то *x→c−*0lim *f*(φ(*x*)) = *A* (доказать).

Замечательный тригонометрический предел

*x→*0 lim sin*xx* = 1*.*

Доказательство. Рассмотрим на плоскости 0*xy* круг единичного ради- уса с центром в начале координат. Проведем построения, указанные на рис. 2.16, где 0 *<x<* π*/*2*.*

2.4. Замечательный тригонометрический предел 31

*Рис. 2.16*

Пусть *S*1*,S*2*,S*3 — площади треугольника *OAB,* кругового сектора *OAB* и треугольника *OAD* соответственно. Поскольку *S*1 *< S*2 *< S*3 и 2*S*1 = = (*OA*)2 sin*x* = sin*x,* 2*S*2 = (*OA*)2*x* = *x,* 2*S*3 = *OA · AD* = tg*x,* то имеют место следующие неравенства:

sin*x<x<* tg*x,* 0 *<x<* π*/*2*.*

Отсюда cos*x <* sin*xx <* 1*,* следовательно,

∣∣∣1 *−* sin*xx*

∣∣∣ *<* 1 *−* cos*x* = 2 sin2(*x/*2) *<* 2 sin(*x/*2) *< x.*

Из этой цепочки неравенств следует, что

*∀*ε *>* 0*,∃*δ(ε) = ε *>* 0*,∀x ∈*

(0*,* π2∣∣∣sin*xx −* 1∣∣∣ ⩽ ε*.*

Отсюда и из определения предела имеем sin*xx x→*+0*→* 1*.*

Далее вычислим предел *x→−*0

lim )

: 0 *< x* ⩽ δ(ε) *⇒*

sin*xx .* Воспользуемся заменой *t* = *−x*

1 = *t→*+0

lim sin*t*

*t* = [*t* = *−x, x → −*0] = *x→−*0

lim sin*xx .*

Теперь них пределов.⊲

равенство *x→*0

lim sin*xx* = 1 следует из критерия равенства односторон-

32 Глава 2. Предел и непрерывность функции

2.5. Непрерывная функция

Пусть функция *f* определена в Δ -окрестности *U*Δ(*c*) точки *x* = *c.* Функцию *f* называют непрерывной в точке *x* = *c,* если пре- дел функции при *x → c* совпадает со значением функции в точке *c,* т. е.

lim *x→cf*(*x*) = *f*(*c*)*.*

Если последнее равенство не выполняется, то говорят, что *f* разрывна в точке *c.*

Записав определение предела функции с помощью « ε- δ» (п. 2.2), прихо- дим к следующему определению непрерывности функции: функция *f* непре- рывна в точке *x* = *c,* если

*∀*ε *>* 0*,∃*δ(ε) *>* 0*,∀x ∈ U*Δ(*c*) : *|x − c|* ⩽ δ(ε) *⇒ |f*(*x*) *− f*(*c*)*|* ⩽ ε*.*

Геометрически непрерывность *f* в точке *x* = *c* означает, что какую бы горизонтальную полосу вдоль прямой *y* = *f*(*c*) ни взять, всегда найдется вертикальная полоса с осью симметрии *x* = *c* такая, что все точки графи- ка функции *f,* расположенные в вертикальной полосе, попадут во взятую горизонтальную полосу (рис. 2.17).

*Рис. 2.17.* Функция, непрерывная в точке *c*

Величину Δ*x* = *x−c* называют п р и р а щ е н и е м а р г у м е н т а, а Δ*y* = = *f*(*c* + Δ*x*) *− f*(*c*) — приращением функции в точке *c.* Используя теорему о замене переменных при вычислении предела, имеем

lim *x→cf*(*x*) = *f*(*c*) *⇔* lim Δ*x→*0Δ*y* = 0*.*

Отсюда следует, что функция *f* непрерывна в точке *x* = *c* тогда и только тогда, когда приращение функции Δ*y* стремится к нулю при Δ*x →* 0*.*

2.5. Непрерывная функция 33

Пример 2.3. Поскольку для функции *y* = *x* имеют место соотношения Δ*y* = Δ*x, x ∈* R*.*Δ*x→*0lim Δ*y* = 0*,* то функция *y* = *x* непрерывна в каждой точке Функции *y* = sin*x, y* = cos*x* непрерывны в каждой точке *x ∈* R*.* Дей- ствительно, для функции *y* = sin*x* имеем *|*Δ*y|* = *|*sin(*x* + Δ*x*) *−* sin*x|* = = *|*2 cos(*x* + Δ*x/*2) sin Δ*x/*2*|* ⩽ *|*Δ*x|* и Δ*x→*0lim Δ*y* = 0*.*

Критерий Гейне непрерывности функции *Функция f непрерывна в точке x* = *c тогда и только тогда, когда для любой последовательности xn → c последовательность f*(*xn*) *сходится к f*(*c*)*.*

Пример 2.4. Функция*y* =

{ sin(1*/x*)*, x* = 0*,*

0*, x* = 0

разрывна *x n* = 2π*n*1в точке *, x n* = *x* = 1

0*.* π*/*2+2π*n*Действительно, возьмем две последовательности *,* стремящиеся к нулю. Соответствующие после-

довательности значений функции sin*x n* = 0*,*sin*x n* = 1 стремятся к разным пределам 0 и 1. Из критерия Гейне непрерывности функции следует разрыв- ность функции в точке *x* = 0 (рис. 2.18).

*Рис. 2.18*

34 Глава 2. Предел и непрерывность функции

Если функция *f* определена в правосторонней Δ-окрестности *V*Δ(*c*) = = *{x* : *c* ⩽ *x <c* + Δ*},*Δ *>* 0*,* точки *c* и

*x→c*+0lim *f*(*x*) = *f*(*c*)*,*

то *f* называют непрерывной справа в точке *x* = *c.* Аналогично опре- деляется непрерывность слева в точке *c.* Функция *f* : (*c −* Δ*,c*] *→* R непрерывна слева в точке *x* = *c,* если

*x→c−*0lim *f*(*x*) = *f*(*c*)*.*

Функцию *f* : *|a, b| → R* называютнепрерывной на промежутке *|a, b|,* если она непрерывна в каждой точке интервала (*a, b*)*,* непрерывна справа в точке *x* = *a,* если *a ∈ |a, b|,* и непрерывна слева в точке *x* = *b,* если *b ∈ |a, b|.*

2.6. Классификация точек разрыва

Пусть функция *f* определена в некоторой Δ-окрестности *U*Δ(*c*) точки *x* = *c.* Функция *f* : *U*Δ(*c*) *→* R является разрывной в точке *c,* если имеет место одно из следующих условий.

1) Функция имеет равные односторонние пределы *f*(*c−* 0) = *f*(*c* + 0)*,* но эти пределы не равны значению функции в точке *x* = *c.* Точку *x* = *c* в этом случаеназывают точкой устранимого разрыва.

Пример 2.5. Для функции*y* =

{ 1*, x* = 1*,* 2*, x* = 1

точка *x* = 1 является точкой устранимого разрыва (рис. 2.19).

2) Функция имеет неравные односторонние пределы *f*(*c −* 0) = *f*(*c* + 0)*.* Точку *x* = *c* в этом случае называют точкой конечного скачка.

Пример 2.6. Для функции

*y* = sign*x* =

⎧⎨⎩

1*, x >* 0*,* 0*, x* = 0*, −*1*, x <* 0

точка *x* = 0 является точкой конечного скачка (рис. 2.20).

2.7. Непрерывность монотонной функции 35

*Рис. 2.19 Рис. 2.20*

3) Хотя бы один из односторонних пределов *f*(*c*+0)*,f*(*c−*0) равен беско- нечности, второй же либо принадлежит R*,* либо тоже равен бесконечности. Точку *x* = *c* в этом случае называют точкой бесконечного скачка (рис. 2.4).

4) Функция не имеет хотя бы одного одностороннего предела *f*(*c* + 0)*, f*(*c −* 0) (конечного или бесконечного). В этом случае говорят, что *x* = *c* — точка неопределенности (пример 2.4).

Точки разрыва 1), 2) относят к точкам разрыва первого типа, точки разрыва 3), 4) — к точкам разрыва второго типа.

Функцию *f* : *|a, b| →* R называют к у с о ч н о-н е п р е р ы в н о й на проме- жутке *|a, b|,* если она имеет лишь конечное число точек разрыва, причем все они являются точками разрыва первого типа.

Примером разрывной в каждой точке функции служит функция Дирихле *D* : [0*,*1] *→* R

*D*(*x*) =

{ 1*, x −* рациональное*,*

0*, x −* иррациональное*.*

2.7. Непрерывность монотонной функции

Функцию *f* : *|a, b| →* R называют: строго возрастающей, если

*∀x*1*,x*2 *∈ |a, b|* : *x*1 *< x*2 *⇒ f*(*x*1) *< f*(*x*2);

строго убывающей,если

*∀x*1*,x*2 *∈ |a, b|* : *x*1 *< x*2 *⇒ f*(*x*1) *> f*(*x*2)*.*

Строго возрастающие и строго убывающие функции называют строго монотонными. Аналогично определяют возрастающие и убывающие функции. Все эти функции называют м о н о т о н н ы м и.

36 Глава 2. Предел и непрерывность функции

Лемма 2.1

*Если функция f* : *|a, b| →* R *монотонна, то для любого x*0 *∈* (*a, b*) *она имеет односторонние пределы f*(*x*0*−*0)*,f*(*x*0+ 0)*, удовлетворяющие нера- венствамf*(*x*0 *−* 0) ⩽ *f*(*x*0) ⩽ *f*(*x*0 + 0) *для возрастающей функции,*

*f*(*x*0 *−* 0) ⩾ *f*(*x*0) ⩾ *f*(*x*0 + 0) *для убывающей функции.*

Доказательство для возрастающей функции. Возьмем произвольную точку *x*0 *∈* (*a, b*)*.* Так как *f* — возрастающая, то

*∀x ∈* (*a, b*) : *x<x*0 *⇒ f*(*x*) ⩽ *f*(*x*0)*.*

Следовательно, множество *L* = *{f*(*x*) : *a<x<x*0*}* является ограниченным сверху. По теореме о гранях существует конечная точная верхняя грань *A* множества *L,* которая удовлетворяет условиям *A* ⩽ *f*(*x*0)*,*

*∀*ε *>* 0*,∃x*ε*,x*ε *< x*0 : *f*(*x*ε) *> A −* ε*,*

*∀x ∈* (*a, b*) : *x>x*ε *⇒ f*(*x*) ⩾ *f*(*x*ε) *⇒ f*(*x*) ⩾ *A −* ε*.* Отсюда

*∀*ε *>* 0*,∃*δ(ε) = *x*0 *− x*ε*,∀x ∈* (*a, b*):0 *< x*0 *− x* ⩽ δ(ε) *⇒ A −* ε ⩽ *f*(*x*) ⩽ *A,*

следовательно, *f*(*x*0 *−* 0) = *A* ⩽ *f*(*x*0)*.* Аналогично, *f*(*x*0 + 0) ⩾ *f*(*x*0)*.* ⊲

Критерий непрерывности монотонной функции *Пусть функция f монотонна на отрезке* [*a, b*]*. Тогда для непрерывности f на* [*a, b*] *необходимо и достаточно, чтобы множеством ее значений был отрезок* [*f*(*a*)*,f*(*b*)] *для возрастающей функции или отрезок* [*f*(*b*)*,f*(*a*)] *для убывающей функции.*

Доказательство для возрастающей функции, отличной от постоянной. Пусть *A* = *f*(*a*)*,B* = *f*(*b*)*,A* = *B.* По лемме 2.1

*∀x*0 *∈* (*a, b*) *⇒ f*(*x*0 *−* 0) ⩽ *f*(*x*0) ⩽ *f*(*x*0 + 0)*.*

Необходимость. Возьмем произвольное *y*0 *∈*]*A, B*[*.* Пусть *S* = *{x* : *f*(*x*) *< < y*0*}* и пусть *x*0 = sup*S.* Если *x<x*0*,* то из определений множества *S* и числа *x*0 следует, что *f*(*x*) *< y*0*,* поэтому

*f*(*x*0 *−* 0) ⩽ *y*0*.* (2.5)

2.8. Непрерывность обратной и сложной функций 37

Если *x>x*0*,* то *f*(*x*) ⩾ *y*0 и

*f*(*x*0 + 0) ⩾ *y*0*.* (2.6)

Из непрерывности *f* в точке *x*0 и из неравенств (2.5), (2.6) следует

*f*(*x*0) = *f*(*x*0 *−* 0) = *f*(*x*0 + 0) = *y*0*,*

т. е. функция принимает значение *y*0 в точке *x*0*.*

Достаточность. От противного: пусть *f* разрывна в некоторой точке *x*0 и пусть *a<x*0 *< b.* Выполняется одно из неравенств

*f*(*x*0 *−* 0) *< f*(*x*0)*, f*(*x*0 + 0) *> f*(*x*0)*.*

Допустим, что имеет место первое неравенство. Возьмем число γ такое, что *f*(*x*0 *−* 0) *<* γ *< f*(*x*0)*.* Число γ удовлетворяет условиям

*∀x ∈* [*a, b*] : *x<x*0 *⇒ f*(*x*) ⩽ *f*(*x*0 *−* 0) *<* γ*,*

*∀x ∈* [*a, b*] : *x* ⩾ *x*0 *⇒ f*(*x*) ⩾ *f*(*x*0) *>* γ*,* т. е. *f* не принимает значения γ *∈* [*f*(*a*)*,f*(*b*)]*,* что противоречит условию критерия.⊲

2.8. Непрерывность обратной и сложной функций

Теорема о непрерывности обратной функции *Если f* : [*a, b*] *→* R *— непрерывная строго возрастающая (строго убываю- щая) функция, то существует обратная к ней функция f −*1*, определен- ная на отрезке* [*f*(*a*)*,f*(*b*)] ([*f*(*b*)*,f*(*a*)])*, которая является непрерывной и строго возрастающей (строго убывающей).*

Доказательство для строго возрастающей функции. Существование об- ратной функции *f−*1 следует из биективности отображения *f* : [*a, b*] *→ →* [*f*(*a*)*,f*(*b*)]*.* Из определения обратной функции следует, что она определе- на на отрезке [*f*(*a*)*,f*(*b*)]*,* строго возрастает и ее значения покрывают отрезок [*a, b*]*.* По критерию непрерывности монотонной функции обратная функция непрерывна на [*f*(*a*)*,f*(*b*)]*.* ⊲

Теорема о непрерывности сложной функции *Если функция f непрерывна в точке x*0*, а функция g непрерывна в точке y*0 = *f*(*x*0)*, то сложная функция g*(*f*(*x*)) *непрерывна в точке x*0*.*

38 Глава 2. Предел и непрерывность функции

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность *xn → x*0*.* По критерию Гейне непрерывности функции имеем

*f*(*xn*) *→ y*0*,∀yn → y*0*,g*(*yn*) *→ g*(*y*0) *⇒ g*(*f*(*xn*)) *→ g*(*f*(*x*0))*.*

На основании критерия Гейне *g*(*f*(*x*)) непрерывна в точке *x*0*.* ⊲

2.9. Локальные свойства непрерывной функции

К локальным свойствам функции относят те свойства, которые опреде- ляются поведением функции в некоторой (сколь угодно малой) окрестности рассматриваемой точки. В теоремах, приведенных в п. 2.9, если значение ар- гумента попадает на конец промежутка задания, то в качестве окрестности выступает соответствующая односторонняя окрестность.

1. Теорема о стабилизации знака *Пусть f задана на промежутке |a, b| и непрерывна в точке x*0 *∈ |a, b|. Если f*(*x*0) = 0*, то существует окрестность точки x*0*, во всех точках которой f имеет тот же знак, что и f*(*x*0)*.*

Доказательство для случая *f*(*x*0) *>* 0 и *x*0 — внутренняя точка *|a, b|.* Для ε = *f*(*x*0)

2 существует δ(ε):0 *<* δ(ε) *<* min*{x*0 *− a, b − x*0*},*

*∀x ∈* [*x*0 *−* δ(ε)*,x*0 + δ(ε)] *⇒ f*(*x*0) *− f*(*x*0)

2 ⩽ *f*(*x*) ⩽ *f*(*x*0) + *f*(*x*0) 2 *.*

Отсюда *f*(*x*) ⩾ *f*(*x*0)*/*2 при *x ∈* [*x*0 *−* δ(ε)*,x*0 + δ(ε)]*.* ⊲

2. Теорема о локальной ограниченности *Пусть f непрерывна в точке x*0 *∈ |a, b|. Тогда x*0 *обладает окрестностью, на которой f ограничена.*

Доказательство для случая *x*0 — внутренняя точка *|a, b|.* Для ε = 1*, ∃*δ(ε) *>* 0*, ∀x ∈* [*x*0 *−* δ(ε)*,x*0 + δ(ε)] *⇒ f*(*x*0) *−* 1 ⩽ *f*(*x*) ⩽ *f*(*x*0)+1*.* ⊲

3. Теорема о непрерывности арифметических комбинаций непре- рывных функций

*Если функции f*(*x*) *и g*(*x*) *непрерывны в точке x*0*, то их: а) сумма f*(*x*) + *g*(*x*)*, б) произведение f*(*x*)*g*(*x*)*, в) частное f*(*x*)

*g*(*x*) *(при условии, что g*(*x*0) = 0) *также непрерывные в точке x*0 *функции.*

Теорема вытекает непосредственно из определения непрерывности функ- ции в точке и соответствующих свойств предела функции.

2.10. Показательная, логарифмическая и гиперболические функции 39

Примеры. 1. Многочлен *f*(*x*) = *anxn* + *...* + *a*0 непрерывен для всех *x ∈* R как произведение и сумма непрерывных функций.

2. Функции *y* = tg*x, x* = π*n, y* = ctg*x, x* = π*/*2 + π*n,* непрерывны как частное двух непрерывных функций.

3. Рациональная функция *y* = *P*(*x*)

*Q*(*x*)*,* где *P*(*x*)*, Q*(*x*) — многочлены, непрерывна при всех *x ∈* R*,* кроме корней знаменателя *Q*(*x*)*.*

4. Функции *y* = arcsin*x, y* = arccos*x, y* = arctg*x, y* = arcctg*x* непрерывны на множестве определения по теореме о непрерывности обратной функции.

2.10. Показательная, логарифмическая и гиперболические функции

Степенная функция с рациональным показателем Функция *y* = *x* непрерывна на R*.* Функция *y* = *xn, n ∈* N*,* непрерыв- на, как произведение непрерывных функций, и строго монотонна на R для нечетных *n* = 2*k* + 1 и строго монотонна на промежутке [0*,*+*∞*) для чет- ных *n* = 2*k.* Следовательно, по теореме о непрерывности обратной функции она имеет непрерывную обратную функцию *y* = *x*1*/n,* определенную на R для нечетных *n* и на промежутке [0*,*+*∞*) для четных *n.* Отображение *y* = = *x−n, n ∈* N определим с помощью равенства *x−n* = 1*xn.* Теперь можно определить степенную функцию с рациональным показателем *r* = *m/n, m ∈ ∈* Z*, n ∈* N (Z — множество целых чисел), положив *xr* = *xm/n* = (*x*1*/n*)*m,* (рис. 2.21, 2.22).

*Рис. 2.21.* Графики функций *y* = *x*1*/*2 (пунктирная кривая) и *y* = *x*1*/*3 *Рис. 2.22.* Графики функций *y* = *x*3*/*2

(пунктирная кривая) и *y* = *x*8*/*3

Эта функция определена на R*,* если *n* = 2*k* + 1*, m* ⩾ 0; на R *\ {*0*},* ес- ли *n* = 2*k* + 1*, −m >* 0; на [0*,*+*∞*)*,* если *n* = 2*k, m* ⩾ 0; на (0*,*+*∞*)*,* если

40 Глава 2. Предел и непрерывность функции

*n* = 2*k, m<* 0*, k ∈* N*.* Функция *x*1*/n* непрерывная и строго возрастающая при *x >* 0*.* Функция *tm* непрерывная при *t >* 0*,* строго возрастающая при *m >* 0 и строго убывающая при *m <* 0*.* Поэтому *y* = *xr,x>* 0*,* — непре- рывная функция как сложная функция непрерывных отображений, строго возрастающая при *r >* 0 и строго убывающая при *r <* 0.

Степенная функция с рациональным показателем при *x >* 0 обладает следующими свойствами:

(*x*1*/n*)*m* = (*xm*)1*/n*; (2.7)

*xr >* 1*,* если *x >* 1*, r ∈* Q*,r>* 0; *xr*1*xr*2 = *xr*1+*r*2*, r*1*, r*2 *∈* Q; (*xr*1)*r*2 = *xr*1*r*2*, r*1*, r*2 *∈* Q; *xr*1 *> xr*2*,* если *x >* 1*, r*1*, r*2 *∈* Q*, r*1 *> r*2*.*

Перечисленные свойства вытекают из свойств целых степеней и из сле- дующего утверждения: если *an* = *bn, n ∈* N*,* то *a* = *b.* Проверим, например, равенство (2.7)((*x*1*/n*)*m*)*n* = ((*x*1*/n*)*n*)*m* = *xm,* ((*xm*)1*/n*)*n* = *xm.*

Показательная функция Выше была определена степенная функция с рациональным показателем, что позволяет ввести для вещественных *a* таких, что 0 *<a<* 1 или *a > >* 1 показательную функцию *y* = *ax, x ∈* Q*,* определенную пока лишь на Q*.* Ограничимся рассмотрением случая *a >* 1*.* Случай 0 *<a<* 1 изучается аналогичным образом.

Число *A* называют пределом функции *y* = *f*(*x*) при *x → x*0 вдоль множества Q*,* если *∀*ε *>* 0*,∃*νε *>* 0*,∀x ∈* Q : 0 *< |x − x*0*|* ⩽ νε *⇒ |f*(*x*) *− −A|*⩽ε*,* и обозначают lim *x→x*0*,x∈*Q*f*(*x*) = *A.* Введенный предел функции вдоль множества Q обладает теми же свойствами (п. 2.3), что и предел функции (доказать).

Свойства функции *y* = *ax, x ∈* Q*.*

1) lim *x→*0*,x∈*Q*ax* = 1*.* Действительно, мы уже знаем, что lim *n→∞a*1*/n* = 1*,* lim *n→∞a−*1*/n* = 1*,* поэтому *∀*ε *>* 0*,∃*νε *>* 0*,∀n*⩾νε *⇒* 1*−*ε ⩽ *a*1*/n* ⩽1+ε*,* 1*−*ε ⩽ *a−*1*/n* ⩽1+ε*.* Для каждого ε *>* 0 зафиксируем номер *n*ε ⩾ νε*.* Для любого рационального *x* такого, что *−*1*/n*ε ⩽ *x* ⩽ 1*/n*ε*,* имеем *a−*1*/n*ε ⩽ *ax* ⩽ *a*1*/n*ε*.* Отсюда 1 *−* ε ⩽ *ax* ⩽ 1 + ε*.* Таким образом, *∀*ε *>* 0*,∃*νε = 1*/n*ε*,∀x ∈* Q : *|x|* ⩽ νε *⇒ |ax −* 1*|* ⩽ ε*.*

2.10. Показательная, логарифмическая и гиперболические функции 41

2) Если *r ∈* Q*,* то lim *x→r, x∈*Q*ax* = *ar.* Действительно, lim *x→r,x∈Qax* = lim *x→r,x∈Qaraxar* = *ar* lim *x→r, x∈Qax−r* = [*x−r* = *t, t →* 0*, t ∈ Q*] = *ar* lim *t→*0*,t∈Qat* = *ar.*

Используя функцию *y* = *ax,x ∈* Q*,* определим показательную функцию на R*.* Пусть *x ∈* R*, s* = sup

*r∈*Q*, r<xar, p* = inf *r∈*Q*,r>xar.* Ясно, что *s, p ∈* R и *s* ⩽ *p.* Покажем, что на самом деле *p* = *s.* Действительно, для любых рациональных *r*1*, r*2 : *r*1 *< x < r*2*,* имеем 0 ⩽ *p − s* ⩽ *ar*1(*ar*2*−r*1 *−* 1) *< < s*(*ar*2*−r*1 *−* 1)*.* Перейдем к пределу в последнем равенстве при *r*2 *− r*1 *→* 0*,* получим 0 ⩽ *p − s* ⩽ 0*,* т. е. *p* = *s.* Для *x ∈* R положим *ax* = *s* = *p.*

Свойства функции *y* = *ax, x ∈* R*, a>* 1*.*

1) lim *r→x, r∈*Q*ar* = *ax.* Действительно, *∀*ε *>* 0*,∃r* ε *∈* Q*, r* ε *< x ⇒ s −* ε *< ar* ε ⩽ *s* = *ax, ∃r* ε *∈* Q*, r* ε *> x ⇒ ax*⩽*ar* ε *< p*+ε*, ∀r ∈* Q*,r* ε⩽*r*⩽*r* ε *⇒ ar* ε⩽*ar*⩽*ar* ε*, ax−*ε⩽*ar*⩽*ax*+ε*.*

2) *∀x*1*, x*2 *∈* R *⇒ ax*1*ax*2 = *ax*1+*x*2*.* Доказательство. Пусть *rn → x*1*,* ρ*n → x*2*, rn ∈* Q*,* ρ*n ∈* Q*.* Тогда *arn → → ax*1*, a*ρ*n → ax*2*, arn*+ρ*n → ax*1+*x*2*.* Так как *arna*ρ*n* = *arn*+ρ*n,* то, переходя к пределу в последнем равенстве, получаем *ax*1*ax*2 = *ax*1+*x*2*.*

3) Функция *y* = *ax, x ∈* R*,a>* 1*,* строго возрастает. Доказательство. Пусть *x*1 *< x*2*.* Существуют рациональные числа *r*1*, r*2 такие, что *x*1 *< r*1 *< r*2 *< x*2*.* Используя определение *ax* и свойства *ar* на Q*,* имеем *ax*1 *< ar*1 *< ar*2 *< ax*2*.*

4) Функция *y* = *ax,a>* 1*,* непрерывна на R*.* Доказательство. Для произвольной точки *x*0 из R

Δ*y* = *ax*0+Δ*x − ax*0 = *ax*0(*a*Δ*x −* 1)*.* (2.8)

Если мы покажем, что lim *x→*0*ax* = 1*,* то из равенства (2.8) будет следовать, что Δ*y →*Δ*x→*00*,* т. е. непрерывность функции *y* = *ax* в точке *x*0*.*

Пусть (*xn*)— произвольная бесконечно малая последовательность. Суще- ствуют бесконечно малые последовательности рациональных чисел, удовле- творяющие неравенствам *r n* ⩽ *xn* ⩽ *r n.* Следовательно, *ar n* ⩽ *axn* ⩽ *ar n.* А так как *ar n →n→∞*1*, ar n →n→∞*1*,* то и lim *n→∞axn* = 1*.* По критерию Гейне lim *x→*0*ax* = 1*.*

42 Глава 2. Предел и непрерывность функции

5) (*ax*1)*x*2 = *ax*1*x*2 *∀x*1*, x*2 *∈* R*.* Доказательство. Первый этап: *x*2 = *r ∈ Q, x*1 *∈* R*.* Пусть *rn* — по- следовательность рациональных чисел такая, что *rn → x*1*.* Тогда (*arn*)*r* = = *arnr, rnr →n→∞x*1*r, arnr →n→∞ax*1*r,* lim *n→∞*(*ar*1)*r* = [*arn* = *tn, tn → ax*1] = lim *tn→ax*1(*tn*)*r* = (*ax*1)*r ⇒* (*ax*1)*r* = *ax*1*r.*

Второй этап: *x*1*, x*2 — произвольные вещественные числа. Пусть ρ*n* — по- следовательность рациональных чисел, сходящаяся к *x*2*.* Тогда (*ax*1)ρ*n* = = *ax*1ρ*n,* lim *n→∞ax*1ρ*n* = *ax*1*x*2*,* lim *n→∞*(*ax*1)ρ*n* = [*ax*1 = *b*] = lim *n→∞b*ρ*n* = *bx*2 = = (*ax*1)*x*2 *⇒* (*ax*1)*x*2 = *ax*1*x*2*.*

6) *ax → x→*+*∞*+*∞, ax → x→−∞*0*.* Доказательство. Пусть *x >* 0*,* [*x*] = *m.* Тогда, используя формулу би- ном Ньютона, имеем *ax*⩾*am* = (1+*q*)*m* = 1+*qm*+*...*+*qm*⩾1+*qm → m→*+*∞*+*∞.* Если *x <* 0*,* то *ax* = (*a−x*)*−*1 = 1*a−x → x→−∞*0*.*

7) График *y* = *ax* (рис. 2.23). Функцию *y* = *ax* называют показательной функцией по основа- нию *a.* В качестве основания часто используется число *e,* и вместо *ex* пишут exp*x.*Логарифмическая функция

На основании теоремы об обратной функции существует функция обрат- ная к показательной *y* = *ax, x ∈* R*, a >* 1*.* Эту функцию называют л о г а р и ф м и ч е с к о й и обозначают *y* = log*a x* (рис. 2.24).

*Рис. 2.23.* Графики функций *y* = (1*/*3)*x* (пунктирная кривая) и *y* = *ex Рис. 2.24.* Графики функций *y* = log10 *x*

(пунктирная кривая) и *y* = log2 *x*

Она является непрерывной и строго возрастающей. Аналогично опреде- ляют функцию *y* = log*a x,* 0 *<a<* 1*.*

2.10. Показательная, логарифмическая и гиперболические функции 43

Поскольку логарифмическая функция является обратной к показатель- ной функции, то

*a*log*a x* = *x ∀x >* 0*,* log*a ax* = *x ∀x ∈* R*.*

Из свойств показательной функции вытекают следующие свойства лога- рифмической функции:

1) log*a a* = 1; 2) log*a*(*x*1*x*2) = log*a x*1 + log*a x*2*, x*1 *>* 0*, x*2 *>* 0; 3) log*a x*1*x*2 = log*a x*1 *−* log*a x*2*, x*1 *>* 0*, x*2 *>* 0*.* Докажем, например, *x*1 = *ay*1*, x*2 = *ay*2*,* свойство *x*1*x*2 = *ay*1+*y*2*,* 2). logПусть *a*(*x*1*x*2) *y*= 1 = loglog*a aa yx*1+*y*1*,* 2 *y*= 2 = loglog*a xa* 1+ *x*2*.* logТогда *a x*2*.* Логарифм числа *x* по основанию *e* называют натуральным и обозначают ln*x.*В начале п. 2.2 была введена степенная функция с рациональным показа- телем. Степенную функцию с любым вещественным показателем определяют лишь при *x >* 0 с помощью формулы

*x*α = *e*α ln*x.*

Сумму *f* +*g,* разность *f −g,* произведение *f ·g,* частное *f/g* и компози- цию *f ◦g* функций *f* и *g* относят к элементарным операциям над функция- ми. Степенную, тригонометрические, обратные тригонометрические, показа- тельную и логарифмическую функции считают основными элементарными функциями. К э л е м е н т а р н ы м функциям относят функции, получающи- еся из основных элементарных функций с помощью элементарных операций, применяемых конечное число раз.

Из результатов п. 2.1 и 2.2 следует вывод: элементарные функции непре- рывны во всех точках, где они определены.

Гиперболические функции Функции

sh*x* := th*x* 12:= (*ex* ch*x*sh*x − e,*

*−x*)*,*

ch*x* cth*x* := 12:= (*ex* ch*x* sh*x* + *e−x*)*,*

называют соответственно гиперболическим синусом, гиперболиче- ским косинусом, гиперболическим тангенсом и гиперболическим котанген- сом.

44 Глава 2. Предел и непрерывность функции

Из определения гиперболических функций сразу следуют тождества:

ch2*x −* sh2*x* = 1*,* ch2*x* + sh2*x* = ch 2*x,* sh 2*x* = 2sh*x*ch*x.*

Графики функций *y* = sh*x, y* = ch*x* представлены на рис. 2.25, 2.26.

*Рис. 2.25.* График функции *y* = sh *x Рис. 2.26.* График функции *y* = ch *x*

Найдем функцию, обратную к отображению *y* = sh*x* :

*y* = 12(*ex − e−x*)*, ex* = *y* + √*y*2 + 1*, x* = ln(*y* + √*y*2 + 1)*.* Аналогично, *y* = ch*x, x* ⩾ 0*, x* = ln(*y* + √*y*2 *−* 1)*, y* ⩾ 1*.* Функции

arcsh*x* = ln(*x* + √*x*2 + 1)*, x ∈* R*,* (2.9) arcch*x* = ln(*x* + √*x*2 *−* 1)*, x* ⩾ 1*,* (2.10)

называют соответственно обратным гиперболическим синусом и обратным гиперболическим косинусом (рис. 2.27, 2.28).

*Рис. 2.27.* График функции *y* = arcsh*x Рис. 2.28.* График функции *y* = arcch *x*

2.11. Замечательные показательно-степенной, логарифмический 45

2.11. Замечательные показательно-степенной, логарифмический, показательный и степенной пределы

1. Доказательство. Показательно-степенной Воспользуемся предел критерием *x→*0lim (1 Гейне. + *x*)

*x* 1= *e.*

Возьмем любую по- следовательность 1) *xn* = *n*1*, xn →* +0*.* Рассмотрим возможные случаи:

2) *xn* = *k*1*nn→∞*lim (1 + *n*1)*n* = *e* (п. 1.11);

*,kn ∈* N*, n→∞*lim (1 + *k*1*n*)*kn* = *e* (п. 1.11); 3) *kn* ⩽ *x*1*n < kn* + 1*,kn ∈* N*, kn* 1

+ 1 *< xn* ⩽ *k*1*n,* (1 + *kn* 1

+ 1)*kn* ⩽ (1 + *xn*)

(1 + *k*1*n*)*kn*+1*,* (1 + *kn* 1

+ 1)*kn*+1(1 + *kn* 1

+ 11*xn* ⩽ )*−*1 ⩽ (1 + *xn*)

(1 + *k*1*n*)*kn*(1 + *k*1*n*)*,*

*e* ⩽ *n→∞*lim (1 + *xn*)

1*xn* ⩽

1*xn* ⩽ *e, x→*+0lim (1 + *x*)

*x* 1= *e*;

4) *x→−*0lim (1 + *x*)

1*−t* = *t→*+0lim ( 1

1 *− t*) 1*t* = = *t→*+0lim 1*x* = [*x* = *−t, t →* +0] = *t→*+0lim (1 *− t*)

(1 + 1 *− t*

) 1*tt* = *t→*+0lim (1 + 1 *− t*

) 1*−t t t*(1 + 1 *− t*

) *t*= *e.* ⊲

2. Логарифмический предел *x→*0

lim ln(1 *x* + *x*)

= 1*.*

1 = *t→e*lim ln*t* = [(1 + *x*)

*x* 1= *t, x →* 0] = *x→*0

lim ln(1 *x* + *x*)

*.*

3. Показательный предел *x→*0

lim *ex x −* 1

= 1*.*

1 = *t→*0

lim ln(1 *t*

+ *t*) = [*ex −* 1 = *t, x →* 0] = *x→*0

lim *ex x −* 1

*.*

4. Степенной предел *x→*0

lim (1 + *x*)*x* μ *−* 1

= μ*.*

*x→*0 lim (1 + *x*)*x* μ *−* 1

= *x→*0

lim *e*μ ln(1+*x*) *x −* 1

= *x→*0

lim *e*μln(1 μ ln(1+*x*) + *−* 1

*x*)

μln(1 *x* + *x*)

= μ*.*

46 Глава 2. Предел и непрерывность функции

2.12. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций

Говорят, что *f* — бесконечно малая (бесконечно большая) функция при *x → c,* если*f*(*x*) *x→c→*0 (*f*(*x*) *x→c→∞*)*.*

Пусть *f*(*x*)*,g*(*x*)*,g*(*x*) = 0*,* — две бесконечно малые при *x → c* функции. Функции *f* и *g* называют э к в и в а л е н т н ы м и при *x → c,* если

*x→c* lim *f*(*x*)

*g*(*x*) = 1*,*

записывают Говорят, что *f*(*x*) функция *x→c∼g*(*x*)*.*

*f*(*x*) — большего порядка малости, чем *g*(*x*) при *x → c,* если

*x→c* lim *f*(*x*)

*g*(*x*) = 0*,* записывают нечно малая *f*(*x*) функция *x→c*=*o*(*g*(*x*))*.* при *x →* Запись *c.*

*f*(*x*) *x→c*=*o*(1) означает, что *f*(*x*) беско-

Запись сти точки *x f*(*x*) = *c x→c*=выполняется *O*(*g*(*x*)) означает, что в некоторой проколотой окрестно-

неравенство

*|f*(*x*)*|* ⩽ *M|g*(*x*)*|,*

где *M* — постоянная.

Аналогично сравнивают и бесконечно большие функции. Замечательные пределы позволяют составить следующую таблицу экви- валентных при *x →* 0 функций:

sin*x ∼ x,* ln(1 + *x*) *∼ x,*

*ex −* 1 *∼ x,* (1 + *x*)μ *∼* μ*x.*

Заметим, что предел произведения или частного не меняется, если при его вычислении некоторые множители заменить на эквивалентные функции.

Пример 2.7

*x→*0 lim ln sin*x*cos*x*

2 =

[sin*x*2 *∼ x*2*,*ln cos*x* = ln(1 + (cos*x −* 1)) *∼*

*∼* cos*x −* 1 *∼ −*2 sin2 *x*2 *∼ −x*2

2

]

= *x→*0

lim *−xx*22 */*2

= *−*12*.*

2.13. Глобальные свойства непрерывной функции 47

В анализе широко используются следующие правила обращения с симво- лами *o*(*·*) и *O*(*·*) (*f*(*x*) *x→c→*0):

а) *o*(*f*) + *o*(*f*) = *o*(*f*)*,* г) *o*(*f*) = *O*(*f*)*,* б) *o*(*f*)*o*(*f*) = *o*(*f* 2)*,* д) *o*(*o*(*f*)) = *o*(*f*)*,* в) *o*(*f*) + *O*(*f*) = *O*(*f*)*,* е) *fn*(*x*)*o*(*f*) = *o*(*fn*+1)*,n ∈* N*.*

Докажем, например, б) *x→c*

lim *o*(*f*)*o*(*f*)

*f*2 = *x→c*

lim *o*(*f*)

*f x→c*

lim *o*(*f*)

*f* = 0*.* В правилах а) — е) равенства являются символическими, а не обычными равенствами. Их следует читать лишь слева направо.

2.13. Глобальные свойства непрерывной функции

К глобальным свойствам функции относят те свойства, которые связаны со всем множеством задания функции.

1. Теорема о промежуточных значениях *Если непрерывная на промежутке |a, b| функция f принимает значения A и B, то она принимает любое промежуточное значение C.*

Доказательство. Пусть *f*(*x*1) = *A, f*(*x*2) = *B, A < C < B, x*1 *< x*2*.* 1) *A <* 0*, C* = 0*,B >* 0*.* Отнесем к множеству *L* такие точки *x,* что на отрезке [*x*1*,x*] функция *f*(*x*) принимает лишь отрицательные значения. Положим *x*0 = sup*L.* Из построения множества *L* вытекает *f*(*x*0 *−* 0) ⩽ 0*.* В точке *x*0 выполняется неравенство *f*(*x*0) ⩾ 0 (иначе, используя теорему о стабилизации знака, легко показать, что множество *L* можно расширить). Поскольку *f* непрерывна, то *f*(*x*0 *−* 0) = *f*(*x*0)*.* Отсюда и из неравенств *f*(*x*0 *−* 0) ⩽ 0*, f*(*x*0) ⩾ 0*,* имеем *f*(*x*0)=0*.*

2) *A, B* и *C* — произвольные. Применяя доказанное на первом этапе утверждение к функции *g*(*x*) = *f*(*x*) *− C,* получаем, что в некоторой точке *x*0 *∈ |a, b|* выполняется равенство *g*(*x*0)=0*.* Отсюда *f*(*x*0) = *C.* ⊲

Геометрическая интерпретация: если график непрерывной функции проходит над и под некоторой горизонтальной прямой, то он пересекает эту прямую (рис. 2.29).

Э к с т р е м а л ь н ы м и значениями функции *f* : *X →* R называют точ- ную верхнюю и точную нижнюю грани множества ее значений на множестве *X.* Значения аргументов, при которых функция принимает экстремальные значения, называют точками экстремума. Ясно, что функция может не иметь точек экстремума.

48 Глава 2. Предел и непрерывность функции

2. Теорема Вейерштрасса *Если функция f непрерывна на отрезке* [*a, b*]*, то*

*∃* ̄*x ∈* [*a, b*] : *f*(*x*) ⩽ *f*( ̄*x*) *∀x ∈* [*a, b*]*,* (2.11)

*∃x ∈* [*a, b*] : *f*(*x*) ⩾ *f*(*x*) *∀x ∈* [*a, b*]*,*

*другими словами, непрерывная на отрезке* [*a, b*] *функция достигает своих точной верхней и точной нижней граней.*

Доказательство для случая (2.11). Пусть sup

*x∈*[*a,b*]*f*(*x*) = *A.* Возьмем воз- растающую последовательность чисел α*n →n→∞A.* Для каждого *n* найдет- ся точка *xn ∈* [*a, b*] такая, что *f*(*xn*) ⩾ α*n.* На основании принципа выбо- ра у последовательности *xn* существует сходящаяся подпоследовательность *xnk →k→∞*  ̄*x.* Покажем, что ̄*x ∈* [*a, b*]*.* Предположим противное: ̄*x* не принад- лежит [*a, b*]*,* т. е. ̄*x<a* или ̄*x > b.* Пусть для определенности ̄*x > b.* По теореме о плотности множества действительных чисел существует Δ *>* 0*,* что ̄*x −* Δ *> b.* На интервале ( ̄*x −* Δ*,*+*∞*) нет членов подпоследователь- ности *xnk,* что противоречит ее сходимости к ̄*x.* Таким образом, ̄*x ∈* [*a, b*]*.* Переходя к пределу в неравенстве *f*(*xnk*)⩾α*nk* при *k → ∞* и используя кри- терий Гейне непрерывности функции, получаем *f*( ̄*x*) ⩾ *A.* Отсюда *A <* +*∞* и *f*( ̄*x*) = *A* (рис. 2.30). ⊲

*Рис. 2.29 Рис. 2.30*

Следствие *Если функция f непрерывна на отрезке* [*a, b*]*, то она ограничена на этом отрезке.*

Доказательство. По теореме Вейерштрасса существуют точки *x,*  ̄*x ∈ ∈* [*a, b*] такие, что inf *x∈*[*a,b*]*f*(*x*) = *f*(*x*)*,* sup

*x∈*[*a,b*]*f*(*x*) = *f*( ̄*x*)*.* Отсюда *f*(*x*) ⩽ ⩽*f*(*x*) ⩽ *f*( ̄*x*) *∀x ∈* [*a, b*]*.* ⊲

2.14. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора 49

2.14. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

Введенное в п. 2.5 определение непрерывной на промежутке *|a, b|* функ- ции *f* : *|a, b| →* R может быть сформулировано с помощью «ε -δ» следую- щим образом:

*∀x ∈ |a, b|,∀*ε *>* 0*,∃*δ(ε*,x* ) *>* 0*,∀x ∈ |a, b|* : *|x − x |* ⩽ δ(ε*,x* ) *⇒*

*⇒ |f*(*x* ) *− f*(*x* )*|* ⩽ ε*.* (2.12)

Если функция *f* : *|a, b| →* R удовлетворяет следующему более сильному, чем (2.12), условию:

*∀*ε *>* 0*,∃*δ(ε) *>* 0*,∀x ,x ∈ |a, b|* : *|x − x |* ⩽ δ(ε) *⇒ |f*(*x* ) *− f*(*x* )*|* ⩽ ε*,*

то ее называют равномерно непрерывной на промежутке *|a, b|.*

При равномерной непрерывности для любого ε *>* 0 найдется δ(ε)*,* не зависящее от *x ∈ |a, b|,* которое обеспечивает выполнение неравенства

*|f*(*x* ) *− f*(*x* )*|* ⩽ ε при всех *x ,x ∈ |a, b|* : *|x − x |* ⩽ δ(ε)*.*

Из равномерной непрерывности *f* на *|a, b|* следует ее непрерывность на этом промежутке. Обратное утверждение не верно (пример 2.8).

Используя правила отрицания (п. 1.3), сформулируем определение нерав- номерно непрерывной на промежутке *|a, b|* функции *f* : *|a, b| →* R :

*∃*ε0 *>* 0*,∀*δ *>* 0*,∃x* 0*,x* 0 *∈ |a, b|* : *|x* 0 *− x* 0*|* ⩽ δ *⇒ |f*(*x* 0) *− f*(*x* 0)*| >* ε0*.* (2.13)

Пример 2.8. Функция *f*(*x*)=1*/x* непрерывна на интервале (0*,*1)*,* од- нако она не является равномерно непрерывной на (0*,*1)*.* Действительно,

*∃*ε0 = 1*,∀*δ : 0 *<* δ⩽1*,∃x* 0 = δ2*,x* 0 = δ4 *∈* (0*,*1) : *|x* 0*−x* 0*|*⩽δ *⇒*

∣∣∣4δ *−* 2δ∣∣∣ = 2δ *>* 1*,*

т. е. *f*(*x*) удовлетворяет условию (2.13), поэтому *f*(*x*) не является равномер- но непрерывной на (0*,*1)*.*

Теорема Кантора *Если функция f непрерывна на отрезке* [*a, b*]*, то она равномерно непре- рывна на* [*a, b*]*.*

Доказательство от противного. Допустим, что *f* не является равномер- но непрерывной на [*a, b*]*,* т. е.

*∃*ε0 *>* 0*,∀*δ *>* 0*,∃x* 0*,x* 0 *∈* [*a, b*] : *|x* 0 *− x* 0*|* ⩽ δ *⇒ |f*(*x* 0) *− f*(*x* 0)*| >* ε0*.* (2.14)

50 Глава 2. Предел и непрерывность функции

Возьмем последовательность δ*n* = 1*/n* и в соответствии с (2.14) найдем *x n,x n ∈* [*a, b*] такие, что *|x n − x n|* ⩽ 1*/n, |f*(*x n*) *− f*(*x n*)*| >* ε0*.* На осно- вании принципа выбора из последовательности *x n* можно выбрать сходя- щуюся подпоследовательность *x nk k→*+*∞→ x*0 *∈* [*a, b*]*.* Отсюда и из неравенства *|x n−x n|* ⩽ 1*/n* следует *x nk k→*+*∞→ x*0*.* Функция *f* непрерывна в точке *x*0*,* по- этому по критерию Гейне непрерывности функции имеем *f*(*x nk*) *k→*+*∞→ f*(*x*0)*, f*(*x nk*) *k→*+*∞→ f*(*x*0*.*) Переходя в неравенстве *|f*(*x nk*) *− f*(*x nk*)*| >* ε0 к пределу при *k → ∞,* получаем противоречивое неравенство *|f*(*x*0)*−f*(*x*0)*| >* ε0*.* По- лученное противоречие показывает, что функция *f* равномерно непрерывна на [*a, b*]*.* ⊲

2.15. Колебание функции

Число

ω(*f,|*α*,*β*|*) := sup

*x ,x ∈|*α*,*β*||f*(*x* ) *− f*(*x* )*|*

называют к о л е б а н и е м функции *f* : *|*α*,*β*| → R* на промежутке *|*α*,*β*|.*

Рассмотрим функцию *f,* заданную на отрезке [*a, b*]*.* Разобьем отрезок [*a, b*] на *n* частей точками *x*0*,x*1*, ..., xn* такими, что

*a* = *x*0 *< x*1 *<...<xk <...<xn* = *b.*

Обозначим это разбиение символом *{xk}*. Число

*W*(*f,{xk}*) := 1⩽*k*⩽*n*max ω(*f,*[*xk−*1*,xk*])

называют колебанием функции *f,* соответствующим разбиению *{xk},* а чис- ло δ := 1⩽*k*⩽*n*max (*xk − xk−*1) — диаметром разбиения.

Пример 2.9. Найдем колебание функции *f*(*x*) = *x*2*,* соответствую- щее разбиению отрезка [0*,*1] на *n* равных частей точками *xk* = *k/n, k* = = 0*,*1*,...,n,*

ω(*x*2*,*[*k − n* 1

*, nk*])

=

(*kn*)2 *−*

(*k −* 1

*n*

)2 = 2*k n−* 2 1

*,*

*W*(*x*2*,{xk}*) = 1⩽*k*⩽*n*

max 2*k − n*2 1

= 2*n n−* 2 1

*,* δ = 1⩽*k*⩽*n*max (*xk − xk−*1) = *n*1*.*

2.15. Колебание функции 51

Теорема о колебании функции *Пусть f — непрерывная на отрезке* [*a, b*] *функция и пусть* (*{xk}m*)*, m* = = 1*, ...,* 0 ⩽ *k* ⩽ *nm, — последовательность разбиений отрезка* [*a, b*] *с диа- метрами* δ*m → m→*+*∞*0*. Тогда последовательность колебаний функции, со- ответствующая этой последовательности разбиений, стремится к нулю при m →* +*∞, т. е.*

*W*(*f,*(*{xk}m*)) *→ m→*+*∞*0*.*

Доказательство. По теореме Кантора

*∀*ε *>* 0*,∃*δ(ε) *>* 0*,∀x ,x ∈* [*a, b*] : *|x − x |* ⩽ δ(ε) *⇒ |f*(*x* ) *− f*(*x* )*|* ⩽ ε*.* (2.15)

Поскольку δ*m →* 0*,* то

*∃*ν(δ(ε)) *>* 0*,∀m* ⩾ ν(δ(ε)) *⇒* δ*m* ⩽ δ(ε) *⇒*

*⇒ |xk − xk−*1*|* ⩽ δ(ε) *∀k* = 1*, ..., nm.* (2.16)

Из соотношений (2.15) и (2.16) имеем

*∀*ε *>* 0*,∃*δ(ε) *>* 0*,∃*ν(δ(ε)) *>* 0*,∀m* ⩾ ν(δ(ε))*,∀k* = 1*, ..., nm,*

*∀x ,x ∈* [*xk−*1*,xk*] *⇒ |f*(*x* ) *− f*(*x* )*|* ⩽ ε *⇒ W*(*f,*(*{xk}m*)) ⩽ ε*,*

что означает *W*(*f,*(*{xk}m*)) *→ m→*+*∞*0*.* ⊲

*ГЛАВА 3*

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

3.1. Определение производной. Производные основных элементарных функций

Рассмотрим функцию *y* = *f*(*x*)*,* определенную в некоторой окрестности точки *c.* Придадим в точке *x* = *c* приращение аргументу Δ*x* и найдем соответствующее приращение функции Δ*y* = *f*(*c* + Δ*x*) *− f*(*c*)*.*

Производной функции *f* в точке *x* = *c* называют предел отноше- ния приращения функции Δ*y* к приращению аргумента Δ*x* при Δ*x →* 0

Δ*x→*0

lim Δ*x* Δ*y*= Δ*x→*0

lim *f*(*c* + Δ*x*) Δ*x*

*− f*(*c*)

и обозначают имеет предел, *f* (*c*)*.* Если отношение *f*(*c* то говорят, что функция в + Δ*x*) точке Δ*x − f*(*c*)

при Δ*x →* 0 *c* имеет конечную п к р бесконечности, о и з в о д н у ю. то Если говорят, отношение что функция *f*(*c* + Δ*x*) Δ*x* в точке *− f*(*c*)

*c* при Δ*x* имеет б *→* е с 0 стремится к о н е ч н у ю производную. В противном случае, если функция не имеет ни конечной ни бесконечной производной, говорят, что функция не имеет производной в точке *x* = *c,* или у функции не существует производной в точке *x* = *c.*

Геометрический смысл производной. Пусть *M*0(*c, f*(*c*))*, M*1(*c* + + Δ*x, f*(*c* + Δ*x*)) — две точки, лежащие на графике Γ*f* функции *y* = *f*(*x*)*.* Прямую, проходящую через точки *M*0 и *M*1*,* называют секущей графика Γ*f* (рис. 3.1). Уравнение секущей имеет вид

*y* = Δ*x*Δ*y*(*x − c*) + *f*(*c*)*.*

Если функция имеет конечную производную в точке *c,* то при Δ*x →* 0 секущая приближается к прямой

*y* = *f* (*c*)(*x − c*) + *f*(*c*)*,* (3.1)

3.1. Определение производной 53

которую называют касательной к графику функции *f* в точке *c.* Коэффици- ент *f* (*c*) в уравнении (3.1) — угловой коэффициент касательной к графику Γ функции в точке *x* = *c.* Таким образом, если функция имеет конечную производную в точке *c,* то *f* (*c*) — угловой коэффициент касательной к гра- фику функции (рис. 3.2).

*Рис. 3.1.* Секущая *Рис. 3.2.* Касательная

Механический смысл производной. Пусть *s* = *s*(*t*) — путь, *t* — время, *v*(*t*) — скорость, *a*(*t*) — ускорение. Тогда *s* (*t*) = *v*(*t*)*,v* (*t*) = *a*(*t*)*.*

Теорема о непрерывности функции, имеющей конечную произ- водную

*Если функция имеет в точке конечную производную, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Из определения производной следует Δ*y/*Δ*x* = *f* (*c*)+ +*o*(1) при Δ*x →* 0*.* Отсюда Δ*y* = *f* (*c*)Δ*x*+*o*(1)Δ*x* и, следовательно, Δ*y → →* 0 при Δ*x →* 0*.* ⊲

Теорема о производных арифметических комбинаций функций *Если функции f и g имеют конечные производные в точке x, то* а) (*f*(*x*) + *g*(*x*)) = *f* (*x*) + *g* (*x*); б) (*f*(*x*)*g*(*x*)) = *f* (*x*)*g*(*x*) + *f*(*x*)*g* (*x*);

в)

(*f*(*x*)

*g*(*x*))

= *f* (*x*)*g*(*x*) *g*2*−* (*x*) *f*(*x*)*g* (*x*)

при *g*(*x*) = 0*.*

Доказательство. Проверим, например, равенство в). Действительно,

1Δ*x*(*f*(*x g*(*x* + + Δ*x*) Δ*x*)

*− f*(*x*)

*g*(*x*))

= Δ*x*1(*f*(*x* + Δ*x*)*g*(*x*) *− f*(*x*)*g*(*x* + Δ*x*)

*g*(*x* + Δ*x*)*g*(*x*)

)

=

= Δ*x*1(*f*(*x* + Δ*x*)*g*(*x*) *− f*(*x*)*g*(*x*) + *f*(*x*)*g*(*x*) *− f*(*x*)*g*(*x* + Δ*x*)

*g*(*x* + Δ*x*)*g*(*x*)

)*.*

54 Глава 3. Производная функции

Отсюда

1Δ*x*(*f*(*x g*(*x* + + Δ*x*) Δ*x*)

*− f*(*x*)

*g*(*x*))

=

*g*(*x*)*f*(*x* + Δ) Δ*x − f*(*x*)

*g*(*x* + *− f*(*x*)*g*(*x* + Δ*x*) Δ*x*

Δ*x*)*g*(*x*) *− g*(*x*)

*.*

Переходя к пределу в этом равенстве при Δ*x →* 0 и учитывая, что согласно теореме о непрерывности функции, имеющей конечную производную, выпол- няется Производные соотношение синуса, *g*(*x*+Δ*x*) косинуса, Δ*x→*0*→g*(*x*)*,* приходим к требуемой формуле.⊲

тангенса и котангенса

(sin*x*) = Δ*x→*0

lim sin(*x* + Δ*x*) Δ*x −* sin*x*

=

= Δ*x→*0

lim 2 sin(Δ*x/*2) Δ*x* cos(*x* + Δ*x/*2)

= cos*x, x ∈* R;

(cos*x*) = Δ*x→*0

lim cos(*x* + Δ*x*) Δ*x −* cos*x*

=

= *−* Δ*x→*0

lim 2 sin(Δ*x/*2) Δ*x* sin(*x* + Δ*x/*2)

= *−*sin*x, x ∈* R;

(tg*x*) = cos*x* sin*x*

= sin *x*cos*x −* sin*x*cos cos2 *x x*

= cos1

2 *x, x* = π2 + π*n*; (ctg*x*) = cos*x*

sin*x* = cos *x*sin*x −* cos*x*sin sin2 *x x*

= *−* sin1

2 *x, x* = π*n.* Производная степенной функции

(*x*α) = Δ*x→*0

lim (*x* + Δ*x*)Δ*x* α *− x*α

=

= Δ*x→*0lim *x*α*−*1(1 + Δ*x/x*)Δ*x/x* α *−* 1

= α*x*α*−*1*, x >* 0*,* α *∈* R;

(*xn*) = Δ*x→*0

lim (*x* + Δ*x*)Δ*x n − xn*

=

= Δ*x→*0

lim *xn* + *nxn−*1Δ*x* + *...* + (Δ*x*)*n − xn*

Δ*x* = *nxn−*1*, x ∈* R*, n ∈* N*.* Производная показательной функции

(*ex*) = Δ*x→*0

lim *ex*+Δ*x* Δ*x − ex*

= Δ*x→*0

lim *ex*(*e*Δ*x −* 1)

Δ*x* = *ex, x ∈* R*.* Производная логарифмической функции

(ln*x*) = Δ*x→*0

lim ln(*x* + Δ*x*) Δ*x −* ln*x*

= Δ*x→*0

lim ln(1 *x* + (Δ*x/x*) Δ*x/x*)

= *x*1*, x >* 0*.*

3.2. Производные обратной и сложной функций 55

3.2. Производные обратной и сложной функций

Теорема о производной обратной функции *Пусть f*(*x*) *строго монотонная и непрерывная в некоторой окрестности точки x* = *c функция, имеющая в точке x* = *c конечную ненулевую произ- водную f* (*c*) = 0*. Тогда в некоторой окрестности точки d* = *f*(*c*) *опреде- лена обратная имеет в функция точке d x* = *g*(*y*)*, конечную производную которая строго монотонна, и g* (*d*) = *f* 1

(*c*)*.*

*непрерывна,*

Доказательство. По теореме об обратной функции в некоторой окрест- ности точки *d* = *f*(*c*) определена обратная функция *x* = *g*(*y*)*,* которая стро- го монотонна и непрерывна. Для каждого малого приращения Δ*y* = 0 най- дется единственное Δ*x* = 0 такое, что *g*(*d* + Δ*y*) = *c* + Δ*x.* Поскольку *g* непрерывна в точке *d,* то Δ*y→*0lim Δ*x* = 0*.* Следовательно,

*g* (*d*) = Δ*y→*0

lim *g*(*d* + Δ*y*) Δ*y − g*(*d*)

= Δ*y→*0

lim Δ*x*Δ*y* = Δ*x→*0

lim 1Δ*y*Δ*x*

= *f* 1

(*c*)*.* ⊲

Пример 3.1. Используя теорему о производной обратной функции, най- дем производные обратных тригонометрических функций:

1) *y*(*x*) = arcsin*x, x*(*y*) = sin*y, x* (*y*) = cos*y,*

*y* (*x*) = (arcsin*x*) = cos*y* 1

= *√*1 1 *− x*2*, |x| <* 1;

2) *y*(*x*) = arccos*x, x*(*y*) = cos*y, x* (*y*) = *−*sin*y, y* (*x*) = (arccos*x*) = sin*y −*1

= *√*1 *−*1 *− x*2*, |x| <* 1;

3) *y*(*x*) = arctg*x, x*(*y*) = tg*y, x* (*y*) = cos1

2 *y, y* (*x*) = (arctg*x*) = cos2 *y* = 1 + 1

*x*2*, x ∈* R; 4) *y*(*x*) = arcctg*x, x*(*y*) = ctg*y, x* (*y*) = sin*−*1

2 *y, y* (*x*) = (arcctg*x*) = *−*sin2 *y* = 1 *−*1

+ *x*2*, x ∈* R*.*

56 Глава 3. Производная функции

Теорема о производной сложной функции *Если функции x* = φ(*t*) *и y* = *f*(*x*) *имеют в точках t*0 *и x*0 = φ(*t*0) *конечные производные* φ (*t*0) *и f* (*x*0)*, то сложная функция z* = *f*(φ(*t*)) *имеет в точке t*0 *конечную производную, которая может быть вычислена по следующему правилу:*(*f*(φ(*t*0))) = *f* (*x*0)φ (*t*0)*,*

*называемому правилом «цепочки».*

Доказательство. Поскольку функции φ и *f* имеют соответственно в точках *t*0*,x*0 конечные производные, то

Δ*x* = φ(*t*0 + Δ*t*) *−* φ(*t*0) = φ (*t*0)Δ*t* + Δ*t*α*,*

Δ*y* = *f*(*x*0 + Δ*x*) *− f*(*x*0) = *f* (*x*0)Δ*x* + Δ*x*β*,*

где α Δ*t→*0=*o*(1)*,* β Δ*x→*0=*o*(1)*,* Δ*x* Δ*t→*0*→*0*.* Отсюда

*f*(φ(*t*0 + Δ*t*)) *− f*(φ(*t*0)) = *f* (*x*0)Δ*x* + Δ*x*β =

= *f* (*x*0)φ (*t*0)Δ*t* + *f* (*x*0)Δ*t*α + (φ (*t*0)Δ*t* + Δ*t*α)β*,*

Δ*t→*0

lim *f*(φ(*t*0 + Δ*t*)) Δ*t − f*(φ(*t*0))

= *f* (*x*0)φ (*t*0)*.* ⊲

Пример 3.2

**1***.* (*ax*) = (*ex* ln*a*) = *ax* ln*a, x ∈* R*,a>* 0*, a* = 1;

**2***. y* = log*a x, x* = *ay,* (*ay*) = *ay* ln*a,*

*y* (*x*) = *ay* 1

ln*a* = 1

*x*ln*a, x >* 0*,a>* 0*, a* = 1;

**3***.* (sh*x*) = 12(*ex − e−x*) = 12(*ex* + *e−x*) = ch*x,* (ch*x*) = sh*x,*

**4***.* (th*x*) = ch1

2 *x,* (cth*x*) = *−* sh1

2 *x, x* = 0*.* Из формул (2.9), (2.10) сразу следует, что

(arcsh*x*) = *√x*2 1 + 1; (arcch*x*) = *√x*2 1 *−* 1*, x >* 1*.*

3.3. Дифференцируемая функция. Дифференциал 57

Таблица производных

(*x*α) = α*x*α*−*1*,x>* 0*,* (*ex*) = *ex,* (ln*x*) = *x*1*,x>* 0*,* (tg*x*) (ctg*x*) (arctg*x*) = = cos*−* 1

2 sin*x*= *,* 1

2 *x xx*= 2 *,* 1

+ *x* π2 = 1+ *,* π*n,* π*n,* (sh*x*) = ch*x,* (ch*x*) = sh*x,* (th*x*) = ch1

2 *x* (sin*x*) = cos*x,* (arcsin*x*) = *√*1 1 *− x*2*, |x| <* 1*,* (arcsh*x*) = *√x*2 1 + 1 (cos*x*) = *−*sin*x,* (arccos*x*) = *− √*1 1 *− x*2*, |x| <* 1*,* (arcch*x*) = *√x*2 1 *−* 1

3.3. Дифференцируемая функция. Дифференциал

Пусть *f* — функция, определенная в некоторой окрестности точки *c.* Функцию *f* называют дифференцируемой в точке *x* = *c,* если суще- ствует постоянная *A* такая, что приращение функции Δ*f* = *f*(*c*+Δ*x*)*−f*(*c*) представимо в виде

Δ*f* = *A*Δ*x* + *o*(Δ*x*)*.*

Произведение *A*Δ*x* называют д и ф ф е р е н ц и а л о м функции *f* в точке *x* = *c* и обозначают

*df* = *A*Δ*x.* (3.2)

Приращение аргумента Δ*x* в формуле (3.2) обычно обозначают через *dx,* при таком обозначении *df* = *Adx.*

Критерий дифференцируемости функции *Для дифференцируемости функции f в точке x* = *c необходимо и доста- точно, чтобы она имела в этой точке конечную производную f* (*c*)*. В этом случае*

*df |x*=*c* = *f* (*c*)*dx.*

Доказательство. Необходимость.

Δ*f* = *A*Δ*x* + *o*(Δ*x*)*,* Δ*f*Δ*x* = *A* + *o*(Δ*x*)

Δ*x , f* (*c*) = Δ*x→*0

lim Δ*f*Δ*x* = *A.*

Достаточность. *f* (*c*) = Δ*x→*0

lim Δ*f*Δ*x,* Δ*f*Δ*x − f* (*c*) = *o*(1)*,*

Δ*f* = *f* (*c*)Δ*x* + *o*(1)Δ*x* = *f* (*c*)Δ*x* + *o*(Δ*x*)*.* ⊲

58 Глава 3. Производная функции

С геометрической точки зрения дифференциал функции *f* в точке *x* = *c* представляет собой приращение ординаты касательной к графику Γ*f* функ- ции в точке (*c, f*(*c*)) при переходе от точки *x* = *c* к точке *x* = *c* + Δ*x* (рис. 3.3).

*Рис. 3.3*

Для дифференцируемой в точке *x* = *c* функции *f* приращение Δ*f* мало отличается от дифференциала *dy* при малых Δ*x*

*f*(*c* + Δ*x*) *− f*(*c*) *≈ dy |x*=*c* = *f* (*c*)Δ*x.*

Пределы

Δ*x→*+0

lim *f*(*c* + Δ*x*) Δ*x − f*(*c*)

= *f* +(*c*)*,*

Δ*x→−*0

lim *f*(*c* + Δ*x*) Δ*x − f*(*c*)

= *f −*(*c*)

называют соответственно п р а в о с т о р о н н е й и л е в о с т о р о н н е й п р о и з в о д н о й функции *f* в точке *x* = *c.*

Непосредственно из определений производной и односторонних производ- ных функции вытекает следующее утверждение: *функция f имеет конечную производную в точке x* = *c тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке конечные равные односторонние производные, причем в этом случае*

*f −*(*c*) = *f* (*c*) = *f* +(*c*)*.*

Если функция имеет в точке *x* = *c* конечную правостороннюю (левосто- роннюю) производную, то она непрерывна справа (слева) в этой точке.

Пример 3.3. Найдем односторонние производные для функции *y* = *|x|* в точке *x* =0:

*f −*(0) = Δ*x→−*0

lim *|*Δ*x|*

Δ*x* = *−*1*, f* +(0) = Δ*x→*+0

lim *|*Δ*x|*

Δ*x* = 1*.*

3.3. Дифференцируемая функция. Дифференциал 59

Производные *f −*(0)*,f* +(0) конечны, но не равны, следовательно, функция *|x|* не дифференцируема в точке *x* = 0 (рис. 3.4).

Функцию *f* : *|a, b| →* R называют дифференцируемой на промежутке *|a, b|,* если она дифференцируема в каждой точке интер- вала (*a, b*)*,* имеет конечную правостороннюю производную в точке *x* = *a,* если *a ∈ |a, b|* и конечную левостороннюю производную в точке *x* = *b,* если *b ∈ |a, b|.*

Функцию *f* называют непрерывно дифференцируемой на промежутке *|a, b|,* если она дифференцируема на промежутке *|a, b|* и ее производная *f* (*x*) непрерывна на *|a, b|.*

Пример 3.4. Отображение

*f*(*x*) =

{ *x*sin(1*/x*)*, x* = 0*,*

0*, x* = 0*,*

непрерывно на R*,* но не имеет односторонних производных в точке *x* = 0*,* поскольку пределы

*f −*(0) = Δ*x→−*0

lim Δ*x*sin(1*/*Δ*x*)

Δ*x , f* +(0) = Δ*x→*+0

lim Δ*x*sin(1*/*Δ*x*)

Δ*x*

не существуют (пример 2.2, рис. 3.5).

*Рис. 3.4.* График непрерывной, но не дифференцируемой в точке *x* = 0 функции

*Рис. 3.5.* График непрерывной функции, которая не имеет в точке *x* = 0 односторонних производных

Пример 3.5. Отображение

*f*(*x*) =

{ *x*2 sin(1*/x*)*, x* = 0*,*

0*, x* = 0*,* (3.3)

60 Глава 3. Производная функции

имеет в точке *x* = 0 равную нулю производную

*f* (0) = Δ*x→*0

lim (Δ*x*)2 sin(1*/*Δ*x*)

Δ*x* = 0*.*

*Рис. 3.6.* График дифференцируемой функции, которая не является непрерывно дифференцируемой

Функция (3.3) дифференцируема на R*,* но не является непрерывно диффе- ренцируемой. Ее производная разрывна в точке *x* = 0 (доказать) (рис. 3.6).

3.4. Производные и дифференциалы высших порядков. Правило Лейбница

Если производная *f* (*x*) функции *f*(*x*) сама является дифференцируе- мой функцией, то производную от *f* (*x*) называют в т о р о й п р о и з в о д н о й

от *f*(*x*) и обозначают *f* (*x*) или *f* (2)(*x*)*,* По индукции определяют

*ddx*2*f*

2*.*

*f*(1)(*x*) = *f* (*x*)*, f*(*n*)(*x*)=(*f*(*n−*1)(*x*)) для *n >* 1*.*

Кроме того, считают *f*(0)(*x*) = *f*(*x*)*.* Очевидно, что

*f*(*n*+*m*)(*x*)=(*f*(*n*)(*x*))(*m*)*.*

Следующие формулы устанавливаются по индукции: 1. *y* = *x*μ*, y*(*n*) = μ(μ *−* 1)*...*(μ *− n* + 1)*x*μ*−n,* в частности, для μ = *n ∈* N (*xm*2. 3. )(*n*) *y y* = = = 0*,* sin*x,* cos*x,* для *yyn>m*;

(*n*) (*n*) = = sin(*x* cos(*x* + + π2π2*n*); *n*);

3.4. Производные и дифференциалы высших порядков 61

4. *y* = *ex, y*(*n*) = *ex*; 5. *y* = ln*x, y*(*n*) = (*−*1)Функцию *f* : *|a, b| →* R *n−*1*x*называют *n* (*n −* 1)! *.*

*n* раз дифференцируемой на промежутке *|a, b|,* если она имеет конечные производные до порядка *n* вклю- чительно в каждой точке интервала (*a, b*)*,* конечные правосторонние произ- водные до порядка *n* в точке *x* = *a,* если *a ∈ |a, b|* и конечные левосторонние производные до порядка *n* в точке *x* = *b,* если *b ∈ |a, b|.* Если функция *f n* раз дифференцируема на промежутке *|a, b|,* то все ее производные до по- рядка *n −* 1 включительно непрерывны на *|a, b|.* Функцию *f* называют *n* раз непрерывно дифференцируемой напромежутке *|a, b|,* если ее производная порядка *n f*(*n*)(*x*) непрерывна на *|a, b|.*

Пример 3.6. Найдем односторонние производные для функции *f*(*x*) = = *x|x|* в точке *x* =0:

*f −*(0) = Δ*x→−*0

lim Δ*x|*Δ*x|*

Δ*x* = 0*, f* +(0) = Δ*x→*+0

lim Δ*x|*Δ*x|*

Δ*x* = 0*.*

Односторонние производные конечны и равны (рис. 3.7), следовательно, функция *f*(*x*) = *x|x|* дифференцируема в точке *x* = 0 и *f* (0) = 0*.* Про- изводная функции *f*(*x*) = *x|x|* равна

(*x|x|*) =

⎧⎨⎩

*−*2*x, x <* 0*,* 0*, x* = 0*,* 2*x, x >* 0*.*

Она непрерывна на *R* (рис. 3.8), следовательно, функция является непре- рывно дифференцируемой на *R.*

*Рис. 3.7.* График непрерывно дифферен- цируемой функции ( *f*(*x*) = *x|x|* ), не яв- ляющейся дважды дифференцируемой

*Рис. 3.8.* График производной функции *y* = *x|x|*

62 Глава 3. Производная функции

Найдем вторые односторонние производные функции *f*(*x*) = *x|x|* в точке *x* = 0

*f −*(0) = Δ*x→−*0

lim *−*2Δ*x*

Δ*x* = *−*2*, f* +(0) = Δ*x→*+0

lim 2Δ*x*

Δ*x* = 2*.*

Производные *f −*(0)*, f* +(0) конечны, но не равны, следовательно, функция *f*(*x*) = *x|x|* не является дважды дифференцируемой в точке *x* = 0*.*

Отображение

*y* =

{ *x*3 sin(1*/x*)*, x* = 0*,*

0*, x* = 0

дважды дифференцируемо на R*,* но не является дважды непрерывно диф- ференцируемым (доказать).

Замечание 3.1. Обозначим через *C*0((*a, b*))*, Dn*((*a, b*))*, Cn*((*a, b*)) соот- ветственно множества непрерывных, *n* раз дифференцируемых и *n* раз непрерывно дифференцируемых функций на интервале (*a, b*)*.* Из теоремы о непрерывности функции, имеющей конечную производную, критерия диф- ференцируемости функции и из примеров 3.3—3.6 вытекают включения

*C*0((*a, b*)) *⊃ D*1((*a, b*)) *⊃ C*1((*a, b*)) *⊃ ... ⊃ Dn*((*a, b*)) *⊃ Cn*((*a, b*))*,*

причем все включения являются строгими.

Для вычисления производных высших порядков произведения двух функций полезным является следующее правило Лейбница.

Правило Лейбница

(*uv*)(*n*) =

∑*nk*=0*Cnku*(*n−k*)*v*(*k*)*, где Cn k*= *k*!(*n n*!

*− k*)!*.* (3.4)

Доказательство по индукции. *n* = 0*,* (*uv*)(0) = *uv,*

∑0*k*=0*C*0*ku*(*n−k*)*v*(*k*) = = *u*(0)*v*(0) = *uv.* Допустим, что равенство (3.4) имеет место при *n* = *m.* Рассмотрим производную (*m* + 1)-го порядка для произведения *uv*

(*uv*)(*m*+1) = ((*uv*)(*m*)) =

( ∑*mk*=0*Cmku*(*m−k*)*v*(*k*))

=

=

∑*mk*=0*Cmk*(*u*(*m*+1*−k*)*v*(*k*) + *u*(*m−k*)*v*(*m*+1))*.*

3.4. Производные и дифференциалы высших порядков 63

Отсюда

(*uv*)(*m*+1) = *Cm*0*u*(*m*+1)*v*(0) +

∑*mk*=1*Cmku*(*m*+1*−k*)*v*(*k*) +

*m−*1∑*k*=0

*Cmku*(*m−k*)*v*(*k*+1)+

+*Cmmu*(0)*v*(*m*+1) = [*Cm m*= *Cm* 0= *Cm*+1 *m*+1 = *Cm*+1 0= 1] =

= *C*(*m*+1)0*u*(*m*+1)*v*(0) +

∑*mk*=1(*Cm k*+ *Cm k−*1 )*u*(*m*+1*−k*)*v*(*k*)+

+*Cm*+1*m*+1 *u*(0)*v*(*m*+1) = [*Cm k*+ *Cm k−*1 = *Cm*+1*k*] =

*m*+1∑*k*=0

*Cm*+1*ku*(*m*+1*−k*)*v*(*k*)*.*

По индукции равенство (3.4) верно для любого *n.* ⊲

Дифференциалы высших порядков Дифференциал функции *y* = *f*(*x*)

*dy* = *f* (*x*)*dx* = *f* (*x*)Δ*x*

зависит от двух переменных *x* и Δ*x.* Если приращение аргумента Δ*x* за- фиксировать, то *dy* является функцией лишь от *x.* Дифференциал от пер- вого дифференциала *d*(*dy*) = *d*(*f* (*x*)Δ*x*) при предположении, что Δ*x* за- фиксировано, называют в т о р ы м д и ф ф е р е н ц и а л о м функции *f* и обо- значают *d*2*y* или *d*2*f,* при этом предполагается, что при вычислении второго дифференциала приращение Δ*x* выбирается таким же, как и при вычисле- нии первого дифференциала. Таким образом,

*d*2*y* = *d*(*f* (*x*)Δ*x*) = *f* (*x*)(Δ*x*)2 = *f* (*x*)*dx*2*,*

где *dx*2 = (*dx*)2*.* Аналогично по индукции определяют *dny* :

*dny* = *d*(*dn−*1*y*)*, n >* 1*,*

и доказывают формулу

*dny* = *f*(*n*)(*x*)*dxn.* (3.5)

Из (3.5) следует, что

*f* (*n*)(*x*) = *dxdny*

*n,*

т.е. производная порядка *n* функции *y* = *f*(*x*) равна отношению диффе- ренциала порядка *n* функции к *n* -й степени дифференциала независимой переменной.

64 Глава 3. Производная функции

При дифференцировании во избежание путаницы с переменными ино- гда указывают те переменные, по которым производится дифференцирова- ние. Такие обозначения мы используем ниже. Пусть *y* = *f*(φ(*t*)) — сложная функция. Тогда *y t* = *f x*φ *t.* Отсюда

*dy* = *f x*φ *tdt* = [φ *tdt* = *dx*] = *f xdx,* т.е. формула *dy* = *f xdx* справедлива в двух случаях: если *x* — независи- мая переменная и если *x* — лишь промежуточная переменная. Это свой- ство первого дифференциала называют инвариантностью формы пер- вого дифференциала. Дифференциалы высших порядков уже не обладают инвариантностью формы

*d*2*y* = *d*2(*f*(φ(*t*)) = (*f*(φ(*t*))) *dt*2 = (*f x*φ *t*) *tdt*2 = = (*f x*2φ *t*φ *t* + *f x*φ *t*2)*dt*2 = [(φ *t*)2*dt*2 = *dx*2*,*φ *t*2*dt*2 = *d*2*x*] = = *f x*2*dx*2 + *f xd*2*x,* что не совпадает со вторым дифференциалом *d*2*y* = *f dx*2 в случае, когда *x*— независимая переменная.

Производные параметрически заданной функции Пусть *x* = *x*(*t*)*, y* = *y*(*t*)*, t ∈ T,* — две функции, определенные на множе- стве *T.* Предположим, что отображение *x* = *x*(*t*)*,t ∈ T,* обладает обратным отображением *t* = *t*(*x*)*, x ∈ X* = *{x* : *x* = *x*(*t*)*, t ∈ T}.* Построим функцию *y* = *y*(*t*(*x*))*, x ∈ X,* которую называют функцией, заданной параметрически соотношениями *x* = *x*(*t*)*, y* = *y*(*t*)*, t ∈ T.*

Используя теоремы о производных сложной и обратной функций (предпо- лагаем, что условия, обеспечивающие возможность применения этих теорем, выполнены), получаем следующую формулу для вычисления производной параметрически заданной функции:

*y x* = *y tt x* = [*t x* = 1*x t*] = *y tx t.* (3.6) Первая производная параметрически заданной функции также является функцией, заданной параметрически соотношениями *y* = *g*(*t*) = *y tx t, x* = *x*(*t*)*, t ∈ T.* Используя формулу (3.6), вычислим ее производную, которая является вто- рой производной исходной функции, заданной параметрически,

*y x*2 = (*y x*) *x* = (*g*(*t*)) *x t t*

=

(*y t/x t*) *t*

*x t* = *y t*2*x* (*x t − t*)*y* 3 *tx t*2

*.*

Аналогично вычисляются и последующие производные.

3.5. Свойства дифференцируемой функции 65

3.5. Свойства дифференцируемой функции

Точку, в которой производная функции равна нулю, называют с т а ц и о н а р н о й точкой этой функции. В стационарной точке касательная к графику горизонтальна.

1. Теорема Ферма *Если x*0 *— точка экстремума функции f* : (*a, b*) *→* R *и функция f диффе- ренцируема в точке x*0*, то x*0 *— стационарная точка.*

Доказательство для случая *f*(*x*0) = sup

*x∈*(*a,b*)*f*(*x*)*.* Для Δ*x* таких, что *x*0 + Δ*x ∈* (*a, b*)*,* имеем

Δ*y* = *f*(*x*0 + Δ*x*) *− f*(*x*0) ⩽ 0*,*

Δ*y*Δ*x* ⩽ 0 *∀*Δ*x >* 0*,*

Δ*y*Δ*x* ⩾ 0 *∀*Δ*x <* 0*.*

Отсюда 0 ⩾ *f* +(*x*0) = *f* (*x*0) = *f −*(*x*0) ⩾ 0 *⇒ f* (*x*0)=0*.* ⊲

Геометрическая интерпретация теоремы Ферма: касательная к гра- фику дифференцируемой в точке экстремума функции параллельна оси 0*x* (рис. 3.9).

2. Теорема Ролля

*Если функция f непрерывна на отрезке* [*a, b*]*, дифференцируема на интер- вале* (*a, b*) *и на концах отрезка принимает равные значения f*(*a*) = *f*(*b*)*, то на интервале* (*a, b*) *существует стационарная точка функции.*

Доказательство. По теореме Вейерштрасса существуют точки *x,*  ̄*x ∈ ∈* [*a, b*] такие, что inf *x∈*[*a,b*]*f*(*x*) = *f*(*x*)*,* sup

*x∈*[*a,b*]*f*(*x*) = *f*( ̄*x*)*.* Если *f*(*x*) = *f*( ̄*x*)*,* то *f* постоянна на [*a, b*] и каждая точка интервала (*a, b*) — стационарная. Если же *f*(*x*) *< f*( ̄*x*)*,* то из условия *f*(*a*) = *f*(*b*) следует, что хотя бы одна из точек ̄*x, x* лежит на интервале (*a, b*)*,* но тогда по теореме Ферма эта точка стационарная.⊲

Геометрическая интерпретация теоремы Ролля: если функция *f* непрерывна на отрезке [*a, b*]*,* дифференцируема на интервале (*a, b*) и на концах отрезка принимает равные значения *f*(*a*) = *f*(*b*)*,* то касательная к графику функции в некоторой точке интервала (*a, b*) параллельна оси 0*x* (рис. 3.10).

66 Глава 3. Производная функции

*Рис. 3.9 Рис. 3.10*

3. Теорема Лагранжа

*Если функция f непрерывна на отрезке* [*a, b*] *и дифференцируема на ин- тервале* (*a, b*)*, то на* (*a, b*) *существует такая точка x* = *c, что*

*f*(*b*) *− f*(*a*) = *f* (*c*)(*b − a*)*.* (3.7)

Доказательство. Построим функцию

φ(*x*)=(*f*(*b*) *− f*(*a*))(*x − a*) *−* (*f*(*x*) *− f*(*a*))(*b − a*)*.*

Функция φ(*x*) удовлетворяет условиям теоремы Ролля

φ(*a*) = φ(*b*)=0*,* φ (*x*)=(*f*(*b*) *− f*(*a*)) *−* (*b − a*)*f* (*x*)*.*

По теореме Ролля существует такая точка *c ∈* (*a, b*) такая, что φ (*c*) = = 0 *⇒ f*(*b*) *− f*(*a*) = *f* (*c*)(*b − a*)*.* ⊲

Поскольку отношение

*f*(*b*) *− f*(*a*) *b − a*

равно угловому коэффициенту секущей, проходящей через концы *A*(*a, f*(*a*))*,B*(*b, f*(*b*)) графика функции *y* = *f*(*x*)*, x ∈* [*a, b*], а производ- ная *f* (*c*) равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке *x* = *c,* то теорема Лагранжа имеет следующую геометрическую интерпретацию: если функция *f* непрерывна на отрезке [*a, b*] и диффе- ренцируема на интервале (*a, b*)*,* то существует точка на графике функции, в которой касательная к графику параллельна секущей, проходящей через концы графика (рис. 3.11).

3.5. Свойства дифференцируемой функции 67

*Рис. 3.11 Рис. 3.12*

Следствие *Если функция f непрерывна на отрезке* [*a, b*] *и дифференцируема на интер- вале* (*a, b*)*, то для любых x, x*+Δ*x ∈* [*a, b*]*, существует число* θ = θ(*x,*Δ*x*)*,* 0 *<* θ *<* 1*, такое, чтоf*(*x* + Δ*x*) *− f*(*x*) = *f* (*x* + θΔ*x*)Δ*x.* (3.8)

Доказательство для случая Δ*x >* 0*.* По теореме Лагранжа существует точка *c* такая, что *f*(*x* + Δ*x*) *− f*(*x*) = *f* (*c*)Δ*x.* Положим θ = *c − x*

Δ*x ,* тогда *x* + θΔ*x* = *c* и 0 *<* θ *<* 1*.* Теперь формула (3*.*8) следует из формулы (3.7) (рис. 3.12).⊲

Формулы (3.7), (3.8) называют формулами к о н е ч н ы х п р и р а щ е н и й, или формулами Л а г р а н ж а.

4. Критерий постоянства дифференцируемой функции *Для постоянства дифференцируемой на промежутке |a, b| функции f необходимо и достаточно, чтобы ее производная f* (*x*) *тождественно на |a, b| равнялась нулю.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Достаточность. *f* (*x*)=0 *∀x ∈ |a, b|.* Зафиксируем *x*0 *∈ |a, b|.* По след- ствию из теоремы Лагранжа

*∀*Δ*x, x*0 + Δ*x ∈ |a, b| ⇒ f*(*x*0 + Δ*x*) *− f*(*x*0)=0 *⇒ f*(*x*) = *f*(*x*0) *∀x ∈ |a, b|.* ⊲

5. Теорема о функциях с совпадающими производными *Если две дифференцируемые функции имеют на интервале совпадающие производные, то они отличаются на этом интервале на постоянную.*

68 Глава 3. Производная функции

Доказательство. *f* (*x*) = *g* (*x*) *∀x ∈* (*a, b*)*,h*(*x*) = *f*(*x*) *− g*(*x*)*,h* (*x*) = = 0 *∀x ∈* (*a, b*) *⇒ h*(*x*) *≡ C, f*(*x*) = *g*(*x*) + *C ∀x ∈* (*a, b*)*.* ⊲

6. Теорема Коши

*Пусть функции f и g непрерывны на отрезке* [*a, b*] *и дифференцируемы на интервале* (*a, b*)*, причем g* (*x*) = 0 *∀x ∈* (*a, b*)*. Тогда на интервале* (*a, b*) *существует такая точка c, что*

*f*(*b*) *− f*(*a*) *g*(*b*) *− g*(*a*) = *f* (*c*)

*g* (*c*)*.* (3.9)

Доказательство. По теореме Лагранжа существует точка *d ∈* (*a, b*) та- кая, что

*g*(*b*) *− g*(*a*) = *g* (*d*)(*b − a*) = 0*.*

Построим функцию

φ(*x*)=(*f*(*x*) *− f*(*a*))(*g*(*b*) *− g*(*a*)) *−* (*f*(*b*) *− f*(*a*))(*g*(*x*) *− g*(*a*))*.*

Эта функция удовлетворяет условиям теоремы Ролля

φ(*a*) = φ(*b*)=0*,* φ (*x*) = *f* (*x*)(*g*(*b*) *− g*(*a*)) *−* (*f*(*b*) *− f*(*a*))*g* (*x*)*.*

По теореме Ролля существует точка *c ∈* (*a, b*) такая, что

φ (*c*)=0 *⇒ f* (*c*)(*g*(*b*) *− g*(*a*)) *− g* (*c*)(*f*(*b*) *− f*(*a*)) = 0*.*

Отсюда после деления на *g*(*b*) *− g*(*a*) = 0 и *g* (*c*) = 0 приходим к формуле (3.9).⊲

3.6. Раскрытие неопределенностей **00** и ***∞∞*** по правилу Лопиталя

Обозначим через *X* множество одного из трех видов:

1)*X* = (*a, b*)*, a* ⩾ *−∞,* 2)*X* = (*b, a*)*, a* ⩽ +*∞,* 3)*X* = (*b, a*) *∪* (*a, d*)*, a ∈* R*.*

Ниже запись lim *x→a* означает правосторонний предел, если *X* — первого вида, левосторонний предел, если *X* — второго вида и обычный предел, если *X* — третьего вида.

3.6. Раскрытие неопределенностей 69

Правило Лопиталя *Пусть f*(*x*) *и g*(*x*) *— дифференцируемые на X функции такие, что x→ag* lim (*x*) *f*(*x*) = 0 = *∀x* 0 = *∈ X. x→a*lim *Если g*(*x*) *предел или x→a*lim *отношения f*(*x*) = *∞ производных* = *x→a*lim *g*(*x*)*, причем f g* (*x*) (*x*)

*при g*(*x*) *x* = *→* 0*, a*

*равен l, т. е. x→a*

lim *f* (*x*)

*g* (*x*) = *l, −∞* ⩽ *l* ⩽ +*∞, то предел отношения функций f*(*x*) *g*(*x*) *при x → a тоже равен l, т. е. x→a*

lim *f*(*x*)

*g*(*x*) = *l.*

Доказательство проведем в следующих четырех случаях (в остальных случаях доказательство аналогично одному из них).

1*◦. X* = (*a, b*)*, a ∈* R*, x→a*lim *f*(*x*) = 0 = *x→a*lim *g*(*x*)*.* Построим функции

*F*(*x*) =

{ *f*(*x*)*,x ∈* (*a, b*)*,*

0*,x* = *a, G*(*x*) =

{ *g*(*x*)*,x ∈* (*a, b*)*,*

0*,x* = *a.*

Используя теорему Коши, имеем

*f*(*x*) *g*(*x*) = *F*(*x*)

*G*(*x*) = *F*(*x*) *G*(*x*) *− − F*(*a*)

*G*(*a*) = *F G* (*c*)

(*c*) = *f g* (*c*) (*c*)

*x→a→l.*

2*◦. t* = *X* = = *g*(1*/t*1*/x,* )*, t ∈* (*b,*+*∞*)*,b* (0*,*1*/b*)*, f∗*(*t*) при вычислении *>* 0*, x→*+*∞*lim *f*(*x*) = 0 = *x→*+*∞*lim и рассмотрим функции *f∗*(*t*) = *t→*+0*→* предела 0*, g∗*(*t*) и *t→*+0уже *→* 0*.* Применяя теорему доказанное в пункте *g*(*x*)*. f*(1*/t*)Положим *, g∗*(*t*) = о замене переменной 1*◦* утверждение, полу- чаем

*x→a* lim *f*(*x*)

*g*(*x*) = *t→*+0

lim *fg∗∗*(*t*) (*t*)

= *t→*+0

lim (*f ∗*(*t*))

(*g∗*(*t*)) = *t→*+0

lim (*f*(1*/t*))

(*g*(1*/t*)) =

= *t→*+0

lim *f g* (1*/t*)(*−*1*/t*(1*/t*)(*−*1*/t*22) )

= *x→*+*∞*

lim *f g* (*x*) (*x*)

= *l.*

3*◦. ∈* (*a, b*) *X* = (*a, b*)*, a ∈* R*, l* : *a<x<*  ̄*x < b,* разность *∈* R*, x→a*lim *l − f*(*x*) *f*(*x*)

*g*(*x*) = представим *∞* = *x→a*lim *g*(*x*)*.* в Для любых виде

*x,*  ̄*x ∈*

*l−f*(*x*)

*g*(*x*) = [*g* (*x*) = 0 *⇒ g*(*x*)*−g*( ̄*x*) = 0] =

(*l−f*(*x*) *g*(*x*) *− − f*( ̄*x*)

*g*( ̄*x*))*g*(*x*) *g*(*x*) *− g*( ̄*x*)

*−f*( ̄*x*)

*g*(*x*)+

+*lg*( ̄*x*)

*g*(*x*) =

(*l − f* (*c*)

*g* (*c*))(1 *− g*( ̄*x*)

*g*(*x*))

*− f*( ̄*x*)

*g*(*x*) + *lg*( ̄*x*)

*g*(*x*)*, x<c<*  ̄*x.*

70 Глава 3. Производная функции

Зафиксируем произвольное ε *>* 0*.* Так как *x→a*

lim *f g* (*x*) (*x*)

= *l,* то

*∃* ̄*x ∈* (*a, b*)*, ∀x ∈* (*a, b*) : *a<x<*  ̄*x ⇒*

∣∣∣*l − f* (*x*)

*g* (*x*)∣∣∣ ⩽ ε *⇒*

∣∣∣*l − f g* (*c*)(*c*)

∣∣∣ ⩽ ε*,*

если *x<c<*  ̄*x.* Далее

*∃*δ(ε) *>* 0*, ∀x ∈* (*a,*  ̄*x*):0 *< x − a* ⩽ δ(ε) *⇒*

∣∣∣*f*( ̄*x*) *g*(*x*)∣∣∣ ⩽ ε*,*∣∣∣*g*( ̄*x*)

*g*(*x*)∣∣∣ ⩽ ε*.*

Таким образом,

∣∣∣*l − f*(*x*)

*g*(*x*)∣∣∣ ⩽ ε(1 + ε) + ε + *l*ε *∀x ∈* (*a,*  ̄*x*):0 *< x − a* ⩽ δ(ε)*,*

что означает *x→a*

lim *f*(*x*)

*g*(*x*) = *l.* 4*◦.* Рассматриваем *X* = (*a, b*)*, a ∈* R*, l* = *∞, g*(*x*)*/f*(*x*) и *x→a*применяем lim *f*(*x*) = *∞* то = же *x→a*lim доказательство, *g*(*x*)*.*

что и в случае 3*◦.* ⊲

Пример 3.7. С помощью правила Лопиталя можно вычислить следую- щие важные пределы, в которых устанавливаются соотношения между функ- циями *ex,* ln*x* и степенной функцией:

1) *x→*+*∞*

lim ln*xx*α = *x→*+*∞*

lim α*x*1α = 0*,* α *>* 0*,* ln*x x→*+*∞*= *o*(*x*α);

2) *x→*+*∞*

lim *x*α*ex* = [*x*α = ln*t, t →* +*∞*] = *t→*+*∞*

lim ln*t*

*t* α 1= 0*,* α *>* 0*,* 3) *x→*+0lim *x*αln*x* = *x→*+0

lim *x*ln*x*

*−*α = *−*α 1*x→*+0lim *x*α = 0*,* α *>* 0*,* ln*x x*α *x→*+*∞*= *o*(*ex*);

*x→*+0= *o*( *x*1α); 4) *x→*+0lim *xx* = *x→*+0lim *ex* ln *x* = 1*.*

Правило Лопиталя неопределенностей вида может 00*, ∞∞.* быть использовано лишь для раскрытия

Другие типы неопределенностей

0 *· ∞, ∞−∞,* 00*,∞*0*,* 1*∞* раскрываются сведением к неопределенностям вида 00 или *∞∞.*

Пример 3.8 *x→*1lim ( 1

ln*x− x −* 1

1)

= [*∞−∞*] = *x→*1

lim [00*x* (*x − −* 1 1) *−* ln*x* ln*x* = *x→*1

lim *x −* (*x* 1 *− −* 1)ln*x*

2 =

]

= 12*.*

3.7. Формула Тейлора 71

3.7. Формула Тейлора. Теорема об остаточном члене формулы Тейлора

Рассмотрим функцию *f,* у которой существуют производные *f* (*x*0)*, ... ,f*(*n*)(*x*0)*.* Можно построить многочлен, имеющий в точке *x*0 те же производные до порядка *n,* что и функция *f*(*x*)*.* Таким многочленом является многочлен Тейлора

*Tn*(*x*) = *f*(*x*0) + *f* (*x*1! 0)

(*x − x*0) + *...* + *f*(*n*)*n*! (*x*0)

(*x − x*0)*n.*

Если положить *Rn*(*x*) = *f*(*x*)*−Tn*(*x*)*,* то функцию *f* можно представить в виде*f*(*x*) = *f*(*x*0) + *f* (*x*1! 0)

(*x − x*0) + *...* + *f*(*n*)*n*! (*x*0)

(*x − x*0)*n* + *Rn*(*x*)*.* (3.10)

Представление (3.10) называют формулой Тейлора для функции *f* в точке *x*0*,* а *Rn*(*x*) — остаточным членом формулы Тейлора.

Поскольку во многих случаях

*Rn*(*x*) = *o*((*x − x*0)*n*)

при *x → x*0*,* то формула Тейлора позволяет выделять главную часть функ- ции *f* около точки *x*0 в виде многочлена.

Теорема об остаточном члене формулы Тейлора *Пусть функция f является* (*n* + 1) *раз дифференцируемой на интервале I* = (*x*0 *−* δ1*,x*0 + δ2)*,*δ1 *>* 0*,*δ2 *>* 0; *x — точка из интервала I*; φ(*t*) *— дифференцируемая на I функция и* φ (*t*) = 0 *на I \ {x}. Тогда между x*0 *и x найдется такое число c, что остаточный член Rn*(*x*) *формулы Тейлора можно представить в виде*

*Rn*(*x*) = φ(*x*) φ *−* (*c*)

φ(*x*0)

*f* (*n*+1)*n*! (*c*)

(*x − c*)*n.* (3.11)

Доказательство для случая *x>x*0*.* Рассмотрим функцию

ψ(*t*) = *f*(*x*) *− f*(*t*) *− f* 1! (*t*)

(*x − t*) *− ... − f*(*n*)*n*! (*t*)

(*x − t*)*n,*

ψ (*t*) = *−f*(*n*+1)*n*! (*t*)

(*x − t*)*n,*ψ(*x*0) = *Rn*(*x*)*,* ψ(*x*)=0*.*

72 Глава 3. Производная функции

Функции ψ(*t*)*,*φ(*t*) на отрезке [*x*0*,x*] удовлетворяют условиям теоремы Ко- ши. Согласно этой теореме на интервале (*x*0*,x*) найдется точка *c* такая, что

φ(*x*) ψ(*x*) *− −* ψ(*x*φ(*x*0)

0) = φ ψ (*c*) (*c*)*.*

Отсюда

*−* φ(*x*) *R− n*(*x*)

φ(*x*0) = *−f*(*n*+1)*n*! (*c*)

(*x − c*)*n* φ 1(*c*)*.* ⊲

3.8. Представление остаточного члена формулы Тейлора в формах Лагранжа, Коши и Пеано

Пусть функция *f* является (*n*+ 1) раз дифференцируемой на интервале *I* = (*x*0 *−* δ1*,x*0 + δ2)*,*δ1 *>* 0*,*δ2 *>* 0; *x ∈ I.* Положив в формуле (3.11) φ(*t*)=(*x − t*)*n*+1*,* получаем

*Rn*(*x*) = *−*(*n −*(*x* + *−* 1)(*x x*0)*− n*+1

*c*)*n*

*f*(*n*+1)*n*! (*c*)

(*x − c*)*n,*

*Rn*(*x*) = *f* (*n* (*n*+1)+ 1)! (*c*)

(*x − x*0)*n*+1*,*

θ := *x c − − x*0

*x*0*, c* = *x*0 + θ(*x − x*0)*,* 0 *<* θ *<* 1*, Rn*(*x*) = *f*(*n*+1)(*x*(*n* 0 + + θ(*x* 1)! *− x*0))

(*x − x*0)*n*+1*.* (3.12)

Формулу (3.12) называют формой Лагранжа для *Rn*(*x*)*.*

Положив в формуле (3.11) φ(*t*) = *x − t,* имеем

*Rn*(*x*) = *−*(*x −*1

*− x*0)

*f*(*n*+1)*n*! (*c*)

(*x − c*)*n,*

*Rn*(*x*) = *f*(*n*+1)*n*! (*c*)

(*x − x*0)*n*+1( *x x − − xc*

0)*n,*

*Rn*(*x*) = *f*(*n*+1)(*x*0 + *n*! θ(*x − x*0))

(1 *−* θ)*n*(*x − x*0)*n*+1*.* (3.13)

Формулу (3.13) называют формой Коши для *Rn*(*x*)*.*

Ослабим требования на функцию *f,* считая, что функция *f* являет- ся лишь *n* раз непрерывно дифференцируемой на интервале *I.* Возьмем

3.8. Представление остаточного члена 73

остаточный член *Rn−*1(*x*) формулы Тейлора в форме Лагранжа *Rn−*1(*x*) = = *f*(*n*)*n*! (*c*)

(*x − x*0)*n* и запишем его в виде

*Rn−*1(*x*) = *f*(*n*)*n*! (*x*0)

(*x − x*0)*n* + α *·* (*x − x*0)*n,*

α = *f*(*n*)(*c*) *− n*! *f*(*n*)(*x*0)

*,* α *x→x*0 = *o*(1)*,* α *·* (*x − x*0)*n x→x*0 = *o*((*x − x*0)*n*)*.* Теперь функцию *f*(*x*) можно представить в виде

*f*(*x*) = *f*(*x*0) + *f* (*x*1! 0)

(*x − x*0) + *···* + *f*(*n* (*n−*1)*−* (*x*1)! 0)

(*x − x*0)*n−*1 + *Rn−*1(*x*) =

= *f*(*x*0) + *f* (*x*1! 0)

(*x − x*0) + *···* + *f*(*n*)*n*! (*x*0)

(*x − x*0)*n* + *o*((*x − x*0)*n*)*.*

Отсюда следует, что остаточный член *Rn*(*x*) можно записать в виде *Rn*(*x*) = = *o*((*x−x*0)*n*)*,* который называют ф о р м о й П е а н о для остаточного члена.

Формула Тейлора в дифференциалах Пусть *f* — (*n* + 1) раз дифференцируемая на интервале *I* функция. Положим в формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа *x* = = *x*0 + Δ*x,*Δ*f* = *f*(*x*0 + Δ*x*) *− f*(*x*0)*,* получим

Δ*f* = *f* (*x*1! 0)

(Δ*x*) + *...* + *f*(*n*)*n*! (*x*0)

(Δ*x*)*n* + *f* (*n*+1)(*n* (*x*0 + + 1)! θ(Δ*x*))

(Δ*x*)*n*+1 =

= [Δ*x* = *dx*] = *f* (*x*1! 0)

*dx* + *···* + *f*(*n*)*n*! (*x*0)

*dxn*+

+*f*(*n*+1)(*n* (*x*0 + + 1)! θ(Δ*x*))

*dxn*+1 = [*f*(*k*)(*x*0)*dxk* = *dkf*(*x*0)] =

= *df*(*x*1! 0)

+ *···* + *dnf*(*xn*! 0)

+ *dn*+1*f*(*x*(*n* 0 + + 1)! θ(Δ*x*))

*.*

Формулу

Δ*f* = *df*1!

∣∣∣*x*0 +*···* + *dn*!

*nf*∣∣∣*x*0 + (*n dn*+1+ 1)!

*f*

∣∣∣*x*0+θΔ*x*

называют формулой Тейлора в дифференциалах с остаточным членом в форме Лагранжа.

74 Глава 3. Производная функции

3.9. Разложение элементарных функций по формуле Тейлора

1. Разложение экспоненты

*f*(*x*) = *ex, f*(*n*)(*x*) = *ex, f*(*n*)(0) = 1 *∀n ∈* N*,*

*ex* =1+ 1! *x*+ *...* + *xn*! *n*+ *Rn*(*x*) =

∑*k*=0 *nxkk*! + *Rn*(*x*) *∀x ∈* R*.*

Остаточный член имеет вид:

*−* в форме Лагранжа *Rn*(*x*) = (*n e*+ θ*x*

1)!*xn*+1*,* 0 *<* θ *<* 1;

*−* в форме Пеано *Rn*(*x*) *x→*0=*o*(*xn*)*.*

2. Разложение синуса (рис. 3.13)

*f*(*x*) = sin*x, f* (*n*)(*x*) = sin(*x* + π2*n*)*, f* (2*l*)(0) = 0*, f* 2*l*+1(0) = (*−*1)*l,*

sin*x* = *x − x*3! 3+ *...* + (*−*1)(2*n n*+ *x*2*n*+1

1)! + *R*2*n*+2(*x*) =

=

∑*nk*=0

(*−*1)*kx*2*k*+1

(2*k* + 1)! + *R*2*n*+2(*x*) *∀x ∈* R*.*

*Рис. 3.13.* Графики функций *y* = *x* — пунктирная прямая;

*y* = *x − x*3*/*6 + *x*5*/*120 — средняя кривая; *y* = sin *x* — нижняя кривая

3.9. Разложение элементарных функций 75

Остаточный член имеет вид:

*−* в форме Лагранжа *R*2*n*+2(*x*) =

sin(θ*x* + (2*n* + 3)π2)

(2*n* + 3)! *x*2*n*+3*,* 0 *<* θ *<* 1;

*−* в форме Пеано *R*2*n*+2(*x*) *x→*0=*o*(*x*2*n*+2)*.*

3. Разложение косинуса *f*(*x*) = cos*x, f* (*n*)(*x*) = cos(*x* + π2*n*)*, f* (2*l*)(0) = (*−*1)*l, f*2*l*+1(0) = 0*,*

cos*x* = 1 *− x*2! 2+ *...* + (*−*1)(2*n*)! *nx*2*n*

+ *R*2*n*+1(*x*) =

=

∑*nk*=0

(*−*1)(2*k*)! *kx*2*k*

+ *R*2*n*+1(*x*) *∀x ∈* R*.*

Остаточный член имеет вид:

*−* в форме Лагранжа *R*2*n*+1(*x*) =

cos(θ*x* + (2*n* + 2)π2)

(2*n* + 2)! *x*2*n*+2*,* 0 *<* θ *<* 1;

*−* в форме Пеано *R*2*n*+1(*x*) *x→*0=*o*(*x*2*n*+1)*.*

4. Разложение логарифма

*f*(*x*) = ln(1 + *x*)*, f*(*n*)(*x*) = (*−*1)(*x n−*1+ (*n* 1)*n −* 1)!

*, f*(*n*)(0) = (*−*1)*n−*1(*n −* 1)!*,*

ln(1 + *x*) = *x − x*2 2+ *...* + (*−*1)*n n−*1*xn*

+ *Rn*(*x*) =

=

∑*nk*=1

(*−*1)*k−*1*xk*

*k* + *Rn*(*x*) *∀x ∈* (*−*1*,*+*∞*)*.*

Остаточный член имеет вид:

*−* в форме Лагранжа *Rn*(*x*)=(*−*1)*n n* + 1

1

(1 + *xn*+1

θ*x*)*n*+1*,* 0 *<* θ *<* 1;

*−* в форме Коши *Rn*(*x*)=(*−*1)*nxn*+1 (1 (1 + *−* θ*x*)θ)*n*+1*n*

*,* 0 *<* θ *<* 1;

*−* в форме Пеано *Rn*(*x*) *x→*0=*o*(*xn*)*.*

76 Глава 3. Производная функции

5. Разложение степенной функции

*f*(*x*)=(1+ *x*)μ*,f*(*n*)(*x*) = μ(μ *−* 1)*···*(μ *− n* + 1)(1 + *x*)μ*−n,*

*f* (*n*)(0) = μ(μ *−* 1)*···*(μ *− n* + 1)*,* (1 + *x*)μ =1+ μ*x*1! + *...* + μ(μ *−* 1)*···*(μ *n*! *− n* + 1)

*xn* + *Rn*(*x*) =

=

∑*nk*=0

μ(μ *−* 1)*···*(μ *k*! *− k* + 1)

*xk* + *Rn*(*x*) *∀x ∈* (*−*1*,*+*∞*)*.*

Остаточный член имеет вид:

*−*в форме Лагранжа *Rn*(*x*) = μ*···*(μ (*n* + 1)! *− n*)

(1 + θ*x*)μ*−n*+1*xn*+1*,* 0 *<* θ *<* 1;

*−*в форме Коши *Rn*(*x*) = μ(μ *−* 1)*···*(μ *n*! *− n*)

(1 + θ*x*)μ*−n*+1(1 *−* θ)*nxn*+1;

*−*в форме Пеано *Rn*(*x*) *x→*0=*o*(*xn*)*.*

В частности,

1 *−* 1

*x* =1+ *x* + *x*2 + *...* + *xn* + *o*(*xn*)*.* Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений Построим приближенную формулу для вычисления *ex* на промежутке 0⩽*x*⩽0*,*1 с погрешностью не более 0*,*00001*.* Используем разложение экспо- ненты по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

*ex* =1+ 1! *x*+ *...* + *xn*! *n*+ (*n e*+ θ*x*

1)!*xn*+1*,* 0 *<* θ *<* 1*,* ∣∣∣ (*n e*+ θ*x*

1)!*xn*+1∣∣∣ ⩽ 2*|x|n*+1

(*n* + 1)! ⩽ 2(0*,*1)(*n* + 1)! *n*+1

*,* 0 ⩽ *x* ⩽ 0*,*1*.*

Из неравенства 2(0*,*1)(*n* + 1)! *n*+1

⩽0*,*00001 методом подбора найдем наименьшее

*n,* при котором выполняется последнее неравенство: *n* = 3*.* Следовательно, на отрезке 0 ⩽ *x* ⩽ 0*,*1

*ex* ≈ 1 + *x* + *x*2 2+ *x*6 3с погрешностью, не большей, чем 0,00001.

Применение формулы Тейлора для раскрытия неопределенно- стейДля раскрытия неопределенностей используют формулу Тейлора с оста- точным членом в форме Пеано.

3.9. Разложение элементарных функций 77

Пример 3.9. Вычислим предел

*I* = *x→*0

lim *e*sin *x − x*2 1 *− x*

*.*

Используя разложения функций *ex* и sin*x* по формуле Тейлора, найдем разложение функции *e*sin*x* до члена, содержащего *x*2*,*

*e*sin*x* = *ex− x*3! 3+*o*(*x*4) =1+ *x − x*33! + *o*(*x*4)+ +12(*x − x*3! 3+ *o*(*x*4))2 + *o*(*x − x*3! 3+ *o*(*x*4))2 =1+ *x* + *x*2 2+ *o*(*x*2)*.* Теперь можем вычислить искомый предел

*I* = *x→*0

lim 1 + *x* + *x*2 2+ *o*(*xx*2 2) *−* 1 *− x*

= *x→*0lim (12 + *o*(*xx*2

2)

)

= 12*.*

*ГЛАВА 4*

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ

4.1. Критерий монотонности

Производная функции в точке *x*0 равна угловому коэффициенту каса- тельной к ее графику, а знак углового коэффициента показывает, острый или тупой угол образует касательная к графику с положительным направле- нием оси 0*x,* поэтому ясно, что знак производной указывает, возрастает или убывает функция.

Критерий монотонности *Для возрастания дифференцируемой функции f* : *|a, b| →* R *необходимо и достаточно, чтобы на интервале* (*a, b*) *производная функции была неот- рицательна:*

*f* (*x*) ⩾ 0 *∀x ∈* (*a, b*);

*для убывания, чтобы производная функции была неположительна:*

*f* (*x*) ⩽ 0 *∀x ∈* (*a, b*)*.*

Доказательство для возрастающей функции. Необходимость. Пусть *x*0 — произвольная точка интервала (*a, b*)

*∀x ∈* (*a, b*) : *x>x*0 *⇒ f*(*x*) ⩾ *f*(*x*0)*,*

*∀x ∈* (*a, b*) : *x<x*0 *⇒ f*(*x*) ⩽ *f*(*x*0)*.* Значит, *f*(*x*) *− f*(*x*0)

*x − x*0 ⩾ 0*, x* = *x*0*,x ∈* (*a, b*)*.* Отсюда и из дифференцируемости функции в точке *x*0 следует, что

*x→x*lim 0

*f*(*x*) *− f*(*x*0)

*x − x*0 = *f* (*x*0) ⩾ 0*.*

4.1. Критерий монотонности 79

Достаточность. Для любых *x*1*,x*2 *∈ |a, b|* : *x*1 *< x*2 применим теорему Лагранжа к функции *f* : [*x*1*,x*2] *→* R

*f*(*x*2) *− f*(*x*1) = *f* (*c*)(*x*2 *− x*1)*, x*1 *< c <x*2*, f* (*c*) ⩾ 0*.*

Отсюда *∀x*1*,x*2 *∈ |a, b|* : *x*1 *< x*2 *⇒ f*(*x*1) ⩽ *f*(*x*2)*.* ⊲

Условия критерия монотонности не обеспечивают строгой монотонности функции.

Пример 4.1. Производная функции (рис. 4.1)

*f*(*x*) =

⎧⎪⎨⎪⎩(*x* + 1*/*2)3*,x* ⩽ *−*1*/*2*,* 0*,−*1*/*2 *<x<* 1*/*2*,* (*x −* 1*/*2)3*,x* ⩾ 1*/*2*,*

⎧⎪⎨3(*x* + 1*/*2)2*,x* ⩽ *−*1*/*2*,* ⎪⎩0*,−*1*/*2 3(*x −* 1*/*2)*<x<* 2*,x* ⩾ 1*/*2*,*

1*/*2*,*

неотрицательна (рис. 4.2), но функция не является строго возрастающей.

*Рис. 4.1.* График нестрого возрастающей функции

*f* (*x*) =

*Рис. 4.2.* График производной нестрого возрастающей функции

Критерий строгой монотонности *Для строгого возрастания (строгого убывания) дифференцируемой функ- ции f* : *|a, b| →* R *необходимо и достаточно, чтобы*

*f* (*x*) ⩾ 0 *∀x ∈* (*a, b*) (*f* (*x*) ⩽ 0 *∀x ∈* (*a, b*))*,*

*причем f* (*x*) *не обращается в нуль ни на одном интервале* (α*,*β) *из |a, b|.*

Доказательство следует из критерия монотонности и из критерия по- стоянства дифференцируемой функции. ⊲

Пример 4.2. Функция *f*(*x*) = *x*3 строго монотонна на (*−∞,*+*∞*)*,* так как *f* (*x*)=3*x*2 ⩾ 0*,* причем *f* (*x*)=0 лишь в одной точке *x* = 0*.*

80 Глава 4. Исследование функции с помощью производных

4.2. Локальный экстремум

Внутреннюю точку *x*0 промежутка *|a, b|* называют точкой: —локального максимума функции *f* : *|a, b| →* R*,* если

*f*(*x*0) ⩾ *f*(*x*)

для всех *x* из некоторой δ-окрестности [*x*0 *−* δ*,x*0 + δ]*,* δ *>* 0*,* точки *x*0;

—строгого локального максимума,если

*f*(*x*0) *> f*(*x*) *∀x ∈* [*x*0 *−* δ*,x*0 + δ]*,x* = *x*0;

— локального минимума, если

*f*(*x*0) ⩽ *f*(*x*) *∀x ∈* [*x*0 *−* δ*,x*0 + δ];

—строгого локального минимума,если

*f*(*x*0) *> f*(*x*) *∀x ∈* [*x*0 *−* δ*,x*0 + δ]*,x* = *x*0*.*

Точки локального минимума и локального максимума называют точками локального экстремума (рис. 4.3).

*Рис. 4.3.* Точки локального экстремума: *x*1 — точка строгого локального минимума; *x*2 — точка локального максимума; *x*3 — точка локального минимума; *x*4 — точка строго локального максимума

Необходимое условие локального экстремума *Если x*0 *– точка локального экстремума дифференцируемой в точке x*0 *функции, то x*0 *— стационарная точка функции.*

Доказательство следует из теоремы Ферма.